Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский (Приволжский) федеральный университет

На правах рукописи

Новиков Петр Андреевич

Локально наиболее мощные критерии проверки гипотез о параметрах случайных процессов с дискретным временем

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Володин Игорь Николаевич

Казань – 2010

Оглавление

Введение

Последовательный анализ является основным методом сокращения объема наблюдений при проведении статистического эксперимента. В рамках различения двух гипотез проблема оптимизации объема наблюдений обычно ставится следующим образом. Проверяемые гипотезы разделяются областью безразличия, и рассматривается класс последовательных критериев, гарантирующий заданные ограничения на вероятности ошибок I и II рода. В этом классе ищется критерий, минимизирующий среднее значение объема наблюдений при ряде фиксированных значений тестируемого параметра или минимизирующий наибольшее значение среднего объема наблюдений по всему параметрическому пространству (проблема Кифера-Вейса).

С точки зрения практики существующие последовательные гарантийные критерии обладают двумя недостатками: среднее значение объема выборки при значении параметра в области безразличия может принимать бесконечное значение, выбор области безразличия всегда составляет тяжелую проблему в практических применениях. Естественно было бы убрать область безразличия и ограничить сверху среднее число наблюдений. В связи с этим в диссертации рассматривается следующая постановка проблемы последовательной проверки гипотез. Рассматривается простая нулевая гипотеза $\theta = \theta_0$ при сложной альтернативе, не обязательно отграниченной от θ_0, а также класс последовательных критериев заданного уровня α, средний объем наблюдений которых ограничен сверху заданным числом $\mathscr{N}$. В этом классе ищется локально наиболее мощный критерий – критерий, максимизирующий производную функции мощности в точке θ_0. Естественно, при наличии некоторого монотонного относительно некоторой статистики отношения правдоподобия такой критерий является равномерно наиболее мощным среди всех критериев уровня α с ограниченным средним объемом выборки. *Актуальность* такого рода постановки для задач последовательного различения гипотез впервые, по-видимому, рассматривалась Дж. Эйбрехемом в его диссертации (1969) [13] и получила дальнейшее развитие в работе Р. Берка (1975) [15]; распространение этих результатов на последовательно планируемый метод содержится в монографии Н. Шмитца (1993) [33]. Во всех цитируемых работах рассматривался только случай наблюдений последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин (простой случайной выборки). В диссертации рассматривается более общий случай проверки гипотез о параметрах случайных процессов с дискретным временем и локально наиболее мощные последовательные критерии строятся при более слабых ограничениях на вероятностную модель. В качестве примеров рассматриваются локально наиболее мощные последовательные критерии для процессов Маркова, процесса авторегрессии AR(1), периодических и конечно-нестационарных процессов с дискретным временем.

Другая проблема, которая рассматривается в диссертации, – это построение локально наиболее мощного критерии проверки той же простой гипотезы, но для многомерного параметра θ, когда класс альтернатив определяется некоторым конусом в параметрическом пространстве с вершиной в точке θ_0. Строятся локально наиболее мощные критерии в особой максиминной постановке: максимизируется производная мощности по направлению наименьшего роста мощности.

Цели диссертационной работы следующие:

1. Характеризация структуры локально наиболее мощного последовательного критерия для случайного процесса с дискретным временем в общем случае. Разработка алгоритма построения такого критерия.

2. Построение локально наиболее мощного последовательного критерия для случайного процесса с дискретным временем в случае независимых наблюдений.

3. Разработка методов построения локально наиболее мощного критерия в случае многомерного параметра.

Основным методом, используемым в диссертации, является метод, впервые примененный Ан. А. Новиковым [26] для характеризации структуры последовательного критерия проверки простой гипотезы при простой альтернативе, идея которого заключается в рассмотрении задачи построения оптимального в том или ином смысле критерия как задачи оптимизации. В диссертации задача построения локально наиболее мощного последовательного критерия (ψ, ϕ) представляет из себя задачу оптимизации с производной функции мощности критерия в точке $\theta = \theta_0$ в качестве целевой функции и ограничениями на средний объем выборки и вероятность ошибки первого рода в качестве ограничений типа неравенств. Для такой задачи составляется «функция Лагранжа» и показывается, что пара (ψ, ϕ), доставляющая минимум «функции Лагранжа», является оптимальной в смысле максимизации производной функции мощности в $\theta = \theta_0$ среди всех пар (ψ', ϕ'), удовлетворяющих указанным ограничениям на средний объем наблюдений и вероятность ошибки первого рода. При этом нахождение пары функций (ψ, ϕ), доставляющей минимум «функции Лагранжа», оказывается возможным без привлечения вариационных методов.

Основные результаты работы следующие:

1. Получена структура локально наиболее мощного последовательного критерия в общем случае (в случае зависимых наблюдений). Разработан алгоритм построения такого критерия.

2. Построен локально наиболее мощный последовательный критерий для независимых наблюдений.

3. Построен локально наиболее мощный последовательный критерий для марковских процессов с дискретным временем.

4. Приводятся неравенства, связывающие производную функции мощности критерия с другими характеристиками критерия: средним объемом наблюдений и вероятностью ошибки первого рода.

5. Введено понятие критерия, локально максиминного по направлениям, –

обобщения понятия локально наиболее мощного критерия на случай многомерного параметра – и получен его вид.

6. Построен асимптотический критерий, локально максимнный по направлениям, и доказано свойство асимптотической оптимальности такого критерия.

В совместной работе [27] соавтору принадлежит постановка задачи. Все остальные результаты работы [27] получены автором самостоятельно.

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут быть использованы при построении локально наиболее мощных последовательных критериев. Такие критерии, в свою очередь, могут находить приложения в таких областях, как обработка радиосигналов, обработка изображений, клинических исследованиях фармацевтических препаратов и других областях науки и практики.

Результаты настоящей диссертации докладывались на международной конференции «Prague Stochastics» (2006 г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры математической статистики МГУ под руководством В. Ю. Королева (2009 г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры математической статистики КФУ под руководством И. Н. Володина (2010 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [10] и [27].

Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих семнадцать параграфов, и изложена на ста четырех страницах. Список литературы содержит тридцать девять наименований, включая работы автора.

Первая глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе производится постановка задачи. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – случайный процесс с дискретным временем, такой, что для любого n вектор $X^{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет плотность f_θ^n, $\theta \in \Theta$, где Θ – открытое подмножество в R. Цель главы – характеризация локально наиболее мощного критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе последовательных критериев с некоторым максимальным средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и некоторым уровнем α.

Вводятся следующие условия регулярности
C1) дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ в смысле L_1 совместной функции плотности f_θ^n для любого n,
C2) дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ функции мощности с конечным средним объемом наблюдений и
C3) существования таких $\gamma > 0$ и $N_0 > 0$, что $E_{\theta_0}(\dot{f}_{\theta_0}^n / f_{\theta_0}^n)^2 \leqslant \gamma n$ для всех $N \geqslant N_0$.

Во втором параграфе для поставленной задачи составляется «функция Лагранжа»

$$L(\psi, \phi) = c\mathscr{N}(\psi) + b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi),$$

где $\mathscr{N}(\psi)$ – средний объем наблюдений, $\alpha(\psi, \phi)$ – размер критерия, $\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)$ – производная в точке $\theta = \theta_0$ функции мощности критерия (ψ, ϕ), и доказывается, что критерий (ψ, ϕ), доставляющий минимум $L(\psi, \phi)$ со средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и размером α, является критерием, максимизирующим производную функции мощности в точке $\theta = \theta_0$ в классе критериев с максимальным средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и уровнем α. Для нахождения формы решающего правила ϕ при данном правиле остановки ψ $L(\psi, \phi)$ представляется в виде

$$L(\psi, \phi) = c\mathscr{N}(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^\psi \phi_n (b f_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $s_n^\psi = (1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{n-1})\psi_n$ – вероятность остановки на n-м этапе, $\dot{f}_{\theta_0}^n$ – производная $f_{\theta_0}^n$ в точке $\theta = \theta_0$, и к интегралу в выражении для $L(\psi, \phi)$ применяется утверждение о том, что минимум интеграла

$$\int (\phi(x) F_1(x) + (1 - \phi(x)) F_2(x)) dx,$$

где $0 \leqslant \phi(x) \leqslant 1$, равен

$$\int \min\{F_1(x), F_2(x)\} dx$$

и достигается при $\phi = I_{\{F_1 \leqslant F_2\}}$ почти наверное, с $F_1 = s_n^\psi \phi_n (b f_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n)$, $F_2 = 0$, что дает форму оптимального решающего правила ϕ_n с критической

областью
$$bf^n_{\theta_0} < \dot{f}^n_{\theta_0}. \tag{0.1}$$
Таким образом, изначальная задача сводится к задаче нахождения правила остановки ψ, минимизирующего
$$L(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int s^{\psi}_n (cnf^n + l_n) dx_1 \dots dx_n,$$
где f^n – функция плотности, по которой считается мат. ожидание момента остановки
$$\mathscr{N}(\psi) = E\tau_\psi = \int s^{\psi}_n n f^n dx_1 \dots dx_n,$$
$l_n = \min\{0, bf^n_{\theta_0} - \dot{f}^n_{\theta_0}\}$.

В третьем параграфе рассматривается класс $\mathscr{F}^N$ правил остановки, прекращающих эксперимент на N-м (конечном) этапе с вероятностью 1, – усеченных правил остановки – и в этом классе путем проведения рассуждений, во многом аналогичных рассуждениям второго параграфа для ψ, характеризуется структура правила остановки, минимизирующего $L(\psi)$: момент остановки
$$\tau_\psi = \min\{n : \, l_n < cf^n + \int V^N_{n+1} dx_{n+1}\},$$
где $V^N_N = l_N$,
$$V^N_n = \min\{n : l_n, cf^n + \int V^N_{n+1} dx_{n+1}\}$$
для $n = N-1, \, N-2, \dots, 1$.

В четвертом параграфе этот результат обобщается на случай неусеченных правил остановки, когда требуется лишь конечность среднего объема наблюдений: момент остановки
$$\tau_\psi = \min\{n : \, l_n < cf^n + \int V_{n+1} dx_{n+1}\}, \tag{0.2}$$
где $V_n = \lim_{N\to\infty} V^N_n$.

Основной результат первой главы приводится в пятом параграфе. Справедлива теорема: при выполнении условий регулярности C1, C2, C3 локально наиболее мощный последовательный критерий проверки гипотезы

$H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ задается сотношениями (0.2) для правила остановки, (0.1) для решающего правила.

В шестом параграфе в качестве примера строится локально наиболее мощный последовательный критерий для проверки гипотезы относительно параметра условных распределений для цепей Маркова и, как для частного случая, для процесса авторегресии AR(1) с неизвестным параметром масштаба.

Вторая глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе рассматривается постановка задачи. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – случайный процесс с дискретным временем с независимыми значениями, случайная величина X_j имеет плотность $f_{\theta,j}$ для любого j, $\theta \in \Theta$, где Θ – открытое подмножество в R. Цель главы – характеризация локально наиболее мощного критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе последовательных критериев с некоторым максимальным средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и некоторым уровнем α.

Вводятся следующие условия регулярности

C1') дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ в смысле L_1 маргинальной функции плотности $f_{\theta,j}$ для любого j,

C2') существования таких $\delta > 0$ и $0 < \gamma_1 < \infty$, что

$$I_j(\theta_0, \theta)/(\theta - \theta_0)^2 \leqslant \gamma_1$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$ и для всех $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$, где

$$I_j(\theta_0, \theta_1) = E_{\theta_0} \ln f_{\theta_0,j}(X_j)/f_{\theta_1,j}(X_j)$$

– различающая информация по Кульбаку-Лейблеру между распределенями X_j при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$, $j = 1, 2, \ldots$ и

C3') существования такого $\gamma_2 > 0$, что $E_{\theta_0}|\dot{f}_{\theta_0,j}/f_{\theta_0,j}| \leqslant \gamma_2$ для всех $j = 1, 2, \ldots$.

Во втором параграфе рассматриваются условия существования производной функции мощности и выводятся неравенства, связывающие эту производную со средним объемом наблюдений и вероятностью ошибки I рода.

Информация Кульбака-Лейблера, содержащаяся в наблюдениях процесса $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ до случайного момента остановки, определяемого правилом ψ, определяется как

$$I(\theta_0, \theta; \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \left(\sum_{j=1}^{n} \ln f_{\theta_0,j} / f_{\theta,j} \right).$$

Устанавливаются границы характеристик (среднего объема наблюдений, вероятности ошибки I рода и производной функции мощности): при выполнении условия регулярности C2 для любого последовательного критерия (ψ, ϕ) с конечным средним объемом наблюдений $E_{\theta_0}\tau_\psi$ производная его функции мощности в точке $\theta = \theta_0$ существует и справедливо неравенство

$$(\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi))^2 \leqslant 2\gamma_1 \beta_{\theta_0}(\psi, \phi)(1 - \beta_{\theta_0}(\psi, \phi)) E_{\theta_0}\tau_\psi.$$

Устанавливается, что при выполнении условий регулярности C1', C2', C3' справедливо равенство

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} \left(s_n^{\psi} \phi_n \sum_{j=1}^{n} q_j \right),$$

где $q_j(x_j) = \dot{f}_{\theta_0,j} / f_{\theta_0,j}$.

В третьем параграфе рассматривается класс $\mathscr{F}^N$ усеченных (до этапа N) правил остановки и в этом классе характеризуется структура правила остановки, минимизирующего «функцию Лагранжа»: момент остановки

$$\tau_\psi = \min\{n:\ g(b - z_n) < c + E_{\theta_0} v_{n+1}^N (z - q_n, c)\},$$

где $g(z) = \min\{0, z\}$, $v_N^N(z, c) = g(z)$, $v_n^N(z, c) = \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v_n^N (z - q_n, c)\}$ для $n = N, N-1, \ldots, 1$, $z_n = \sum_{j=1}^{n} \dot{f}_{\theta_0,j} / f_{\theta_0,j}$.

В четвертом параграфе этот результат обобщается на случай неусеченных правил остановки с конечным средним объемом наблюдений: момент остановки

$$\tau_\psi = \min\{n : g(b - z_n) < c + E_{\theta_0} v_{n+1}(z - q_n, c)\}, \tag{0.3}$$

где $v_n = \lim_{N\to\infty} v_n^N$, $N = 1, 2, \ldots$.

Основной результат второй главы приводится в пятом параграфе. Справедлива теорема: при выполнении условий регулярности C1', C2', C3' локально наиболее мощный последовательный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ задается сотношениями (0.3) для правила остановки, $z_n > b$ для решающего правила.

В шестом параграфе в качестве примеров рассматриваются случай «периодических» наблюдений, то есть случай, когда существует такой $T \in \mathrm{N}$, что $f_{\theta,n+T} = f_{\theta,n}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, и случай «конечно-нестационарных» наблюдений, то есть случай, когда $f_{\theta,j} = f_{\theta,j+1}$ для любого j начиная с некоторого k.

Третья глава состоит из пяти параграфов. В первом параграфе производится постановка задачи. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка фиксированного объема n из распределения с плотностью f^n_θ, где $\theta \in \Theta \subset \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ – многомерный параметр. Цель главы – построение локально наиболее мощного критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где Θ_1 – конус в N-мерном пространстве, $\Theta_1 = \{\theta_0 + tu, | \, u \in U, \, t > 0\}$.

Вводится условие регулярности:
C1") дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ в смысле L_1 совместной функции плотности $f^n_{\theta_0}$.

Во втором параграфе вводится понятие критерия, локально наиболее мощного в направлении, – критерия, максимизирующего производную функции мощности по выбранному направлению u, – и устанавливается, что критическая область такого критерия имеет вид $bf^n_{\theta_0} < u'\dot{f}^n_{\theta_0}$.

В третьем параграфе на основе понятия критерия, локально наиболее мощного в направлении, вводится понятие критерия, локально максиминного по направлениям: для каждого направления u из области альтернативы строится локально наиболее мощный в этом направлении критерий ϕ_u, далее, для любого другого направления v из области альтернативы вычисляется локальная мощность $v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u)$ критерия ϕ_u и находится то направление v, у которого мощность критерия ϕ_u минимальна, а затем ищется направление u^*, которое максимизирует этот минимум мощности, – локально наиболее мощный критерий в этом направлении u^* называется локально максиминным по направлениям критерием:

$$\inf_{v \in U} v' \dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_{u^*}) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in U} v' \dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u). \tag{0.4}$$

В четвертом параграфе строится критерий, локально максиминный по направлениям, для проверки гипотезы о среднем значении многомерного нормального (θ, Σ) распределения $\theta = \theta_0$ при области альтернативы Θ_1: такой критерий отклоняет нулевую гипотезу при

$$u^{*\prime} \Sigma^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) > z_\alpha (n u^{*\prime} \Sigma^{-1} u^*)^{1/2},$$

где u^* определяется из соотношения (0.4).

В пятом параграфе строится асимптотический локально максиминный по направлениям критерий для локально асимптотически нормальных семейств. Такой критерий имеет ту же форму, что локально максиминный по направлениям критерий для проверки гипотезы о среднем значении нормального распределения, где в качестве матрицы ковариаций Σ выступает информационная матрица Фишера в точке, соответствующей нулевой гипотезе. Доказывается, что такой критерий обладает свойством асимптотической оптимальности в смысле асимптотического превосходства производной функции мощности по любому направлению из области альтернативы такого критерия над аналогичной производной любого другого локально наиболее мощного в любом направлении из области альтернативы критерия асимптотического уровня α.

Глава 1

Локально наиболее мощный последовательный критерий

В настоящей главе проводится характеризация структуры локально наиболее мощного последовательного критерия в общем случае. В качестве примеров строятся локально наиболее мощные критерии для марковского процесса с дискретным временем и процесса авторегрессии.

1.1 Постановка задачи

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – случайный процесс с дискретным временем, распределение которого, P_θ, зависит от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, где Θ – открытое подмножество в R. Рассматривается задача проверки простой гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при сложной альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$, где $\theta_0 \in \Theta$ – некоторое фиксированное значение параметра.

Пусть (ψ, ϕ) – последовательный критерий проверки гипотез с (рандомизированным) правилом остановки ψ и (рандомизированным) решающим правилом ϕ, где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots)$. На каждом этапе $n = 1, 2, \dots$ значение $\psi_n(x_1, \dots, x_n)$ понимается как условная вероятность *остановиться и перейти к принятию решения* при условии, что эксперимент дошел до этапа n и что наблюдения процесса, полученные до этого этапа включительно, были $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Правила $\psi_1, \psi_2, \dots$ применяются последовательно, пока эксперимент на некотором этапе не остановится. При остановке на этапе $n \geqslant 1$ для принятия решения используется решающее правило ϕ_n. Значение $\phi_n(x_1, \dots, x_n)$ понимается как условная вероятность *отклонить* нулевую гипотезу H_0 при наблюдениях $(x_1, \dots, x_n)$.

В соответствии с вышеописанной процедурой правило остановки ψ порождает случайную величину τ_ψ (*момент остановки*), имеющую распределение

$$P(\tau_\psi = n) = E(1-\psi_1)(1-\psi_2)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n, \tag{1.1}$$

для всех $n = 1, 2, \dots$.

В последнем выражении ψ_n понимается как функция случайных величин,

$$\psi_n = \psi_n(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

в то время как изначально она определяется как функция

$$\psi_n = \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Такая «двойственность» функции наблюдений будет подразумеваться на протяжении всей работы. Следует руководствоваться следующим правилом, дающим однозначную интерпретацию ψ_n: если F_n – некоторая функция наблюдений и ее аргументы опущены, то:

- $F_n = F_n(X_1, \dots, X_n)$, если F_n стоит под знаком вероятности или математического ожидания
- $F_n = F_n(x_1, \dots, x_n)$ в противном случае.

Продолжительность последовательного эксперимента характеризуется величиной *среднего объема наблюдений*:

$$\mathscr{N}(\psi) = E\tau_\psi = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} nP(\tau_\psi = n), & \text{если } P(\tau_\psi < \infty) = 1, \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Функция мощности последовательного критерия (ψ, ϕ) в точке $\theta \in \Theta$ определяется как

$$\beta_\theta(\psi, \phi) = P_\theta(\text{отклонить } H_0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_\theta(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n\phi_n.$$

Здесь и далее в диссертации $E_\theta(\cdot)$ означает математическое ожидание относительно распределения P_θ процесса $X_1, X_2, \dots$.

Вероятность ошибки I рода критерия (ψ, ϕ) определяется как

$$\alpha(\psi, \phi) = \beta_{\theta_0}(\psi, \phi).$$

Поскольку выражение типа $(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n$ будет встречаться часто, введем для него следующее обозначение:

$$s_n^\psi = (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n,\ n = 1, 2, \dots.$$

Обозначим также

$$t_n^\psi = (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1}),\ n = 1, 2, \dots$$

($s_1^\psi \equiv \psi_1$ и $t_1^\psi \equiv 1$ по определению). Также введем обозначения

$$S_n^\psi = \{(x_1, \dots, x_n) : \ s_n^\psi(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

$$T_n^\psi = \{(x_1, \dots, x_n) : \ t_n^\psi(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

Предположим, что при P_θ для любого $\theta \in \Theta$ вектор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ имеет функцию «плотности»

$$f_\theta^n = f_\theta^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(производную Радона-Никодима его производной) по отношению к произведению мер

$$\mu^n \ = \ \underbrace{\mu \otimes \mu \otimes \dots \otimes \mu}_{n \quad \text{раз}},$$

с некоторой сигма-конечной мерой μ на соответствующем пространстве.

Также будем предполагать, что распределение P процесса, используемое при вычислении $\mathscr{N}(\psi)$ – некоторое случайное (но фиксированного) распределение, такое, что $(X_1, \dots, X_n)$ имеет «плотность» $f^n(x_1, \dots, x_n)$ относительно μ^n, $n = 1, 2, \dots$.

Будем предполагать (когда это потребуется) выполнение следующих условий.

Условие C1. *Для любого $n \geqslant 1$ существует такая интегрируемая (относительно меры μ^n) функция $\dot{f}^n_{\theta_0}$, что*

$$\int \left| f^n_\theta - f^n_{\theta_0} - (\theta - \theta_0)\dot{f}^n_{\theta_0} \right| d\mu^n = o(\theta - \theta_0)$$

при $\theta \to \theta_0$.

Условие регулярности C1 представляет собой по сути условие дифференцируемости (по Фреше) совместной плотности в пространстве $L_1(\mu^n)$ интегрируемых относительно меры μ^n функций.

В частности, из условия регулярности C1 следует, что для любой такой измеримой функции $\phi_n = \phi_n(x_1, \ldots, x_n)$, что $0 \leqslant \phi_n \leqslant 1$, справедливо равенство

$$\int \phi_n (f^n_\theta - f^n_{\theta_0} - h\dot{f}^n_{\theta_0}) d\mu^n = o(h) \tag{1.3}$$

при $h \to 0$.

Из равенства (1.3) следует, что функция мощности $\beta_\theta(\psi, \phi)$ любого критерия фиксированного объема выборки, основанного на n наблюдениях $(\psi_1 \equiv 0, \ldots, \psi_{n-1} \equiv 0, \psi_n \equiv 1)$, дифференцируема в точке $\theta = \theta_0$ и ее производная равна

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = \int \dot{f}^n_{\theta_0} d\mu^n$$

(см. [24] и схожие условия для случая независимых одинаково распределенных случайных величин в [22] в части, касающейся дифференцируемости функции мощности).

Легко видеть, что если частная производная f^n_θ по θ существует μ^n-почти наверное в $\theta = \theta_0$, то из условия регулярности C1 следует, что

$$\dot{f}^n_{\theta_0} = \left. \frac{\partial f^n_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0}$$

μ^n-почти наверное.

Функция мощности критерия с фиксированным объемом наблюдений N, (ψ^N, ϕ), то есть такого критерия, что $\psi^N_1 = \cdots = \psi^N_{n-1} = 0$, $\psi^N_n = 1$, равна

$$\beta_\theta(\psi^N, \phi) = \int \phi_N f^N_\theta d\mu^N.$$

Таким образом, из выполнения условия регулярности С1 следует, что функция мощности критерия с фиксированным объемом наблюдений (ψ^N, ϕ) дифференцируема в точке $\theta = \theta_0$, и

$$\dot{\beta}_\theta(\psi^N, \phi) = \int \phi_N \dot{f}_\theta^N d\mu^N$$

является ее производной в этой точке.

Введем аналогичное условие для последовательного критерия:

Условие С2. *Функция мощности любого критерия (ψ, ϕ), такого, что $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$, дифференцируема в $\theta = \theta_0$, и*

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int (1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{n-1}) \psi_n \phi_n \dot{f}_{\theta_0}^n \, d\mu^n.$$

Введем условие возрастания информации Фишера не быстрее, чем линейно, с увеличением объема наблюдений.

Условие С3. *Существуют $\gamma > 0$ и $N_0 > 0$ такие, что*

$$I(\theta_0) = E_{\theta_0} \left(\frac{\dot{f}_{\theta_0}^n}{f_{\theta_0}^n} \right)^2 \leqslant \gamma n$$

для всех $n \geqslant N_0$.

Основная цель данной главы – характеризация критериев (ψ, ϕ), максимизирующих производную функции мощности в $\theta = \theta_0$, $\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)$, в классе последовательных критериев уровня α

$$\alpha(\psi, \phi) \leqslant \alpha \tag{1.4}$$

со средним объемом наблюдений, не превосходящим $\mathscr{N}$,

$$\mathscr{N}(\psi) \leqslant \mathscr{N} \tag{1.5}$$

где $\alpha \in [0, 1)$ и $\mathscr{N} \geqslant 1$ – некоторые ограничения. Если такой критерий существует, он называется локально наиболее мощным критерием (см. [15], [29]).

На роль распределения, относительно которого вычисляется величина среднего объема наблюдений $\mathscr{N}(\psi) = E\tau_\psi$, естественным претендентом является P_{θ_0}. Тем не менее, в данной главе ставится более общая задача, когда $E\tau_\psi$ вычисляется относительно произвольного (но фиксированного) распределения процесса. В частности, разумным может оказаться использование в качестве P «смешанное» распределение, определяемое как

$$P(\cdot) = \int_\Theta P_\theta(\cdot) d\pi(\theta),$$

где π – некоторая вероятностная мера.

1.2 Сведение к задаче оптимальной остановки

Для максимизации производной функции мощности в точке $\theta = \theta_0$, $\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)$, по всем последовательным критериям, удовлетворяющим ограничениям (1.4) и (1.5), запишем функцию Лагранжа:

$$L(\psi, \phi) = L(\psi, \phi; b, c) = c\mathcal{N}(\psi) + b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi), \tag{1.6}$$

где $c > 0$ и $b \in \mathrm{R}$ – некоторые постоянные множители.

Следующая теорема обосновывает правомерность применения метода множителей Лагранжа к сформулированной условной задаче.

Теорема 1.1 *Пусть Δ – некоторый класс последовательных критериев. Пусть существуют действительные числа $c > 0$ и $b > 0$ и критерий $(\psi, \phi) \in \Delta$ с $L(\psi, \phi; b, c) > -\infty$, такие, что*

$$L(\psi, \phi; b, c) = \inf_{(\psi', \phi') \in \Delta} L(\psi', \phi'; b, c)$$

и такие, что

$$\mathcal{N}(\psi) = \mathcal{N} \quad \text{и} \quad \alpha(\psi, \phi) = \alpha. \tag{1.7}$$

Тогда для любого критерия $(\psi', \phi') \in \Delta$, удовлетворяющего

$$\mathcal{N}(\psi') \leqslant \mathcal{N} \quad \text{и} \quad \alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha \tag{1.8}$$

выполняется

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'). \tag{1.9}$$

Если по крайней мере одно из неравенств (1.8) строгое, то неравенство (1.9) строгое.

Доказательство. Пусть $(\psi', \phi') \in \Delta$ – любой критерий, удовлетворяющий (1.9). Вследствие (1.7) и определения $L(\psi, \phi; b, c)$

$$c\mathscr{N} + b\alpha - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = c\mathscr{N}(\psi) + b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)$$

$$\leqslant c\mathscr{N}(\psi') + b\alpha(\psi', \phi') - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi') \leqslant c\mathscr{N} + b\alpha - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi').$$

Таким образом,

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi').$$

Чтобы получить последнее утверждение теоремы, заметим, что если

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'),$$

то

$$c\mathscr{N} + b\alpha - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = c\mathscr{N}(\psi) + b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)$$

$$= c\mathscr{N}(\psi') + b\alpha(\psi', \phi') - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi') = c\mathscr{N} + b\alpha - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'),$$

что возможно лишь если $\mathscr{N}(\psi') = \mathscr{N}$ и $\alpha(\psi', \phi') = \alpha$. $\square$

Следующая лемма будет использоваться во многих местах на протяжении всей диссертации.

Лемма 1.1 *Пусть на пространстве с сигма-конечной мерой μ F_1, F_2 – некоторые μ-интегрируемые функции и ϕ – некоторая измеримая функция такая, что*

$$0 \leqslant \phi(x) \leqslant 1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int (\phi(x)F_1(x) + (1 - \phi(x))F_2(x))d\mu(x) \geqslant \int \min\{F_1(x), F_2(x)\}d\mu(x),$$

причем равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда

$$I_{\{x\colon F_1(x) < F_2(x)\}}(x) \leqslant \phi(x) \leqslant I_{\{x\colon F_1(x) \leqslant F_2(x)\}}(x)$$

μ-почти наверное.

Замечание 1.1 *Запись вида*

$$I_{\{F_1<F_2\}}(x) \leqslant \phi(x) \leqslant I_{\{F_1 \leqslant F_2\}}(x)$$

по сути означает

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } F_1(x) < F_2(x), \\ \epsilon, \text{ если } F_1(x) = F_2(x), \\ 1, \text{ если } F_1(x) > F_2(x), \end{cases}$$

для некоторого ϵ*,* $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$*.*

Доказательство. Для доказательства неравенства из формулировки теоремы достаточно показать, что

$$\int [\phi(x)F_1(x) + (1-\phi(x))F_2(x) - \min\{F_1(x), F_2(x)\}]d\mu(x) \geqslant 0. \qquad (1.10)$$

Подынтегральная функция в левой части (1.10) равна

$$(1-\phi(x))(F_2(x) - F_1(x)) \geqslant 0,$$

когда $F_1(x) < F_2(x)$, и

$$\phi(x)(F_1(x) - F_2(x)) \geqslant 0,$$

когда $F_1(x) \geqslant F_2(x)$, из чего следует (1.10).

Таким образом, равенство в (1.10) достигается тогда и только тогда, когда

$$\phi(x)F_1(x) + (1-\phi(x))F_2(x) = \min\{F_1(x), F_2(x)\}$$

μ-почти наверное, или

$$\phi(x)(F_1(x) - F_2(x)) = \min\{F_1(x), F_2(x)\} - F_2(x)$$

μ-почти наверное. Это, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\phi(x)(F_1(x) - F_2(x)) = I_{\{F_1(x) \geqslant F_2(x)\}}(x)(F_1(x) - F_2(x))$$

μ-почти наверное, что эквивалентно

$$I_{\{F_1<F_2\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi(x^{(n)}) \leqslant I_{\{F_1\leqslant F_2\}}(x^{(n)})$$

Теорема доказана. □

Следующая теорема позволяет найти форму оптимального правила принятия решения ϕ при данном правиле остановки ψ.

Теорема 1.2 *Пусть выполняются условия регулярности C1 и C2. Тогда для любого $b>0$ и для любого последовательного критерия (ψ,ϕ), такого, что $E_{\theta_0}\tau_\psi<\infty$, справедливо неравенство*

$$b\alpha(\psi,\phi)-\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi,\phi)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int s_n^{\psi}\min\{0,bf_{\theta_0}^n-\dot{f}_{\theta_0}^n\}d\mu^n,$$

причем равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда

$$I_{\{bf_{\theta_0}^n<\dot{f}_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf_{\theta_0}^n\leqslant\dot{f}_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \tag{1.11}$$

μ^n-почти наверное на S_n^{ψ} для любых $n=1,2,\ldots$.

Доказательство. Представим два последних слагаемых рассматриваемой функции Лагранжа как

$$b\alpha(\psi,\phi)-\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\int s_n^{\psi}\phi_n(bf_{\theta_0}^n-\dot{f}_{\theta_0}^n)d\mu^n. \tag{1.12}$$

Для получения утверждения теоремы воспользуемся леммой 1.1 применительно к каждому из слагаемых в правой части (1.12).

Фиксируем некоторое $n\geqslant 1$. Применяя лемму 1.1, взяв выражение

$$s_n^{\psi}\phi_n(bf_{\theta_0}^n-\dot{f}_{\theta_0}^n)$$

в качестве F_1, 0 в качестве F_2 и ϕ_n в качестве ϕ, получаем неравенство

$$\int s_n^{\psi}\phi_n(bf_{\theta_0}^n-\dot{f}_{\theta_0}^n)d\mu^n\geqslant\int s_n^{\psi}\min\{0,bf_{\theta_0}^n-\dot{f}_{\theta_0}^n\}d\mu^n, \tag{1.13}$$

равенство в котором достигается тогда и только тогда, когда для данного n выполняется

$$I_{\{bf_{\theta_0}^n<\dot{f}_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf_{\theta_0}^n\leqslant\dot{f}_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)})$$

μ^n-почти наверное на S_n^ψ.

Суммируя левые и правые части (1.13) по $n = 1, 2, \dots$, получаем

$$b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^\psi \min\{0, bf_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n\} d\mu^n. \tag{1.14}$$

Если в (1.12) в качестве ϕ_n положим $\phi_n' = I_{\{bf_{\theta_0}^n < \dot{f}_{\theta_0}^n\}}$, $n = 1, 2, \dots$, то получим

$$b\alpha(\psi, \phi') - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi') = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^\psi \min\{0, bf_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n\} d\mu^n,$$

где $\phi' = (\phi_1, \phi_2, \dots)$. Из условия регулярности C2 левая часть этого выражения конечна, а следовательно, правая часть выражения (1.14) конечна.

Таким образом, в (1.14) достигается равенство тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в правой части

$$b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^\psi \phi_n (bf_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n) d\mu^n.$$

равно соответствующему слагаемому в правой части (1.14). По лемме 1.1 это возможно тогда и только тогда, когда ϕ_n удовлетворяет условию

$$I_{\{bf_{\theta_0}^n < \dot{f}_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf_{\theta_0}^n \leqslant \dot{f}_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)})$$

μ^n-почти наверное на S_n^ψ, для любого $n = 1, 2, \dots$. $\square$

Введем обозначение

$$L(\psi) = L(\psi; b, c) = \inf_\phi L(\psi, \phi; b, c).$$

Следствие 1.1 *Пусть выполняются условия регулярности C1 и C2. Если $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$, то*

$$L(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^\psi (cnf^n + l_n) d\mu^n, \tag{1.15}$$

где, по определению,

$$l_n = \min\{0, bf_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n\}.$$

Доказательство. Переходя к $\inf_\phi$ в обеих частях равенства (1.6), получаем

$$\inf_\phi L(\psi, \phi) = c\mathcal{N}(\psi) + \inf_\phi (b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)).$$

С учетом (1.1) и (1.2) первое слагаемое можно записать как

$$c\mathscr{N}(\psi) = c\sum_{n=1}^{\infty} nP(\tau_\psi = n) = c\sum_{n=1}^{\infty} nEs_n^\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\int s_n^\psi cnf^n d\mu^n.$$

По теореме 1.2

$$\inf_\phi (b\alpha(\psi,\phi) - \dot\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)) = \sum_{n=1}^{\infty}\int s_n^\psi \min\{0, bf_{\theta_0}^n - \dot f_{\theta_0}^n\} d\mu^n$$

Таким образом,

$$L(\psi) = \inf_\phi L(\psi,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\int s_n^\psi (cnf^n + \min\{0, bf_{\theta_0}^n - \dot f_{\theta_0}^n\}) d\mu^n,$$

что и требовалось доказать. $\square$

С помощью теоремы 1.2 задача минимизации $L(\psi,\phi;b,c)$ сведена теперь к задаче минимизации $L(\psi;b,c)$, то есть к задаче оптимальной остановки. В самом деле, если существует ψ такое, что $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$ и такое, что

$$L(\psi;b,c) = \inf_{\psi'} L(\psi';b,c),$$

то, добавляя к ψ любое решающее правило ϕ, удовлетворяющее

$$I_{\{bf_{\theta_0}^n < \dot f_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf_{\theta_0}^n \leqslant \dot f_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}),$$

по теореме 1.2 имеем, что для любого последовательного критерия (ψ',ϕ'):

$$L(\psi,\phi;b,c) = L(\psi;b,c) \leqslant L(\psi';b,c) \leqslant L(\psi',\phi';b,c).$$

В частности, таким образом получается критерии (ψ,ϕ), удовлетворяющие

$$L(\psi,\phi;b,c) = \inf_{(\psi',\phi')\in\Delta} L(\psi',\phi';b,c),$$

которые представляют наибольшую важность для решения исходной условной задачи (см. теорему 1.1).

1.3 Структура оптимальных последовательных критериев. Усеченные правила остановки

В этом параграфе характеризуется структура правила остановки, минимизирующего «функцию Лагранжа» $L(\psi)$, в классе усеченных правил остановки. На протяжении всего параграфа предполагается выполнение условия регулярности C1.

Рассмотрим класс усеченных правил остановки, то есть класс $\mathscr{F}^N$, $N \geqslant 1$, таких правил остановки ψ, для которых $\psi_N \equiv 1$.

Для любого правила остановки $\psi \in \mathscr{F}^N$ положим

$$\begin{aligned} L_N(\psi) &= L_N(\psi; b, c) = \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \int s_n^\psi (cnf^n + l_n) d\mu^n + \int t_N^\psi \left(cNf^N + l_N \right) d\mu^N. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для $\psi \in \mathscr{F}^N$

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^\psi (cnf^n + l_n) d\mu^n = \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \int s_n^\psi (cnf^n + l_n) d\mu^n + \int t_N^\psi (cNf^N + l_N) d\mu^N = L_N(\psi). \end{aligned}$$

Определим рекуррентно V_n^N, $n = N, \ldots, 1$. Пусть

$$V_N^N \equiv l_N$$

и для любого $n = N-1, N-2, \ldots 1$

$$V_n^N = \min\{l_n, cf^n + R_n^N\}, \tag{1.16}$$

где

$$R_n^N = R_n^N(x_1, \ldots, x_n) = \int V_{n+1}^N(x_1, \ldots, x_{n+1}) d\mu(x_{n+1}).$$

Наконец, пусть для любого $k = 1, \ldots, N$

$$Q_k^N(\psi) = \sum_{n=1}^{k-1} \int s_n^\psi (cnf^n + l_n) d\mu^n + \int t_k^\psi \left(ckf^k + V_k^N \right) d\mu^k$$

Следующая лемма понадобится для доказательства теоремы 1.3.

Лемма 1.2 *Пусть k – некоторое целое неотрицательное число и пусть*

$$v_{k+1} = v_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$$

– любая μ^{k+1}-интегрируемая функция. Тогда

$$\sum_{n=1}^{k} \int s_n^{\psi}(cnf^n + l_n)d\mu^n + \int t_{k+1}^{\psi}\left(c(k+1)f^{k+1} + v_{k+1}\right)d\mu^{k+1}$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{k-1} \int s_n^{\psi}(cnf^n + l_n)d\mu^n + \int t_k^{\psi}\left(ckf^k + v_k\right)d\mu^k, \tag{1.17}$$

где

$$v_k = \min\{l_k, cf^k + \int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\},$$

а

$$\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1}) = \int v_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})d\mu(x_{k+1})$$

по определению. Равенство в (1.17) достигается тогда и только тогда, когда

$$I_{\{l_k < cf^k + \int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_k(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_k \leqslant cf^k + \int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\}}(x^{(n)})$$

μ^k-почти наверное на $T_k^{\psi} = \{(x_1, \dots, x_k) : t_k^{\psi}(x_1, \dots, x_{k-1}) > 0\}$.

Доказательство. Очевидно, (1.17) эквивалентно

$$\int s_k^{\psi}(ckf^k + l_k)d\mu^k + \int t_{k+1}^{\psi}(c(k+1)f^{k+1} + v_{k+1})d\mu^{k+1} \geqslant \int t_k^{\psi}(ckf^k + v_k)d\mu^k.$$

По теореме Фубини левая часть этого выражения равна

$$\int s_k^{\psi}(ckf^k + l_k)d\mu^k + \int t_{k+1}^{\psi}\left(\int (c(k+1)f^{k+1} + v_{k+1})d\mu(x_{k+1})\right)d\mu^k$$

$$= \int t_k^{\psi}\left[\psi_k(ckf^k + l_k) + (1-\psi_k)\int (c(k+1)f^{k+1} + v_{k+1})d\mu(x_{k+1})\right]d\mu^k.$$

Так как $f^{k+1}(X_1, \dots, X_{k+1})$ – совместная функция плотности $(X_1, \dots, X_n)$, имеем

$$\int f^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})d\mu(x_{k+1}) = f^k(x_1, \dots, x_k),$$

так что

$$\int t_k^{\psi}\left[\psi_k(ckf^k+l_k)+(1-\psi_k)\int(c(k+1)f^{k+1}+v_{k+1})d\mu(x_{k+1})\right]d\mu^k.$$

записывается как

$$\int t_k^{\psi}\left[ckf^k+\psi_k l_k+(1-\psi_k)\left(cf^k+\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\right)\right]d\mu^k.$$

По лемме 1.1 выражение

$$\int t_k^{\psi}\left[ckf^k+\psi_k l_k+(1-\psi_k)\left(cf^k+\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\right)\right]d\mu^k.$$

больше или равно

$$\int t_k^{\psi}\left[ckf^k+\min\left\{l_k, cf^k+\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\right\}\right]d\mu^k=\int t_k^{\psi}[ckf^k+v_k]d\mu^k$$

из определения v_k.

По той же лемме 1.1

$$\int t_k^{\psi}\left[ckf^k+\psi_k l_k+(1-\psi_k)\left(cf^k+\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\right)\right]d\mu^k.$$

равно

$$\int t_k^{\psi}\left[ckf^k+\min\left\{l_k, cf^k+\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\right\}\right]d\mu^k=\int t_k^{\psi}[ckf^k+v_k]d\mu^k$$

тогда и только тогда, когда

$$I_{\{l_k<cf^k+\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\}}(x^{(n)})\leqslant\psi_k(x^{(n)})\leqslant I_{\{l_k\leqslant cf^k+\int v_{k+1}d\mu(x_{k+1})\}}(x^{(n)})$$

выполняется μ^k-почти наверное на T_k^{ψ}. □

Теорема 1.3 *Пусть $\psi\in\mathscr{F}^N$ – любое (усеченное) правило остановки. Тогда для любого $1\leqslant k\leqslant N$*

$$L_N(\psi)\geqslant Q_k^N(\psi) \tag{1.18}$$

Нижняя граница $L_N(\psi)=Q_k^N(\psi)$ достигается тогда и только тогда, когда

$$I_{\{l_n<cf^n+R_n^N\}}(x^{(n)})\leqslant\psi_n(x^{(n)})\leqslant I_{\{l_n\leqslant cf^n+R_n^N\}}(x^{(n)})$$

μ^n-почти наверное на T_n^{ψ} для любого $n=k,k+1,\dots,N-1$.

Доказательство. Заметим, что

$$Q_N^N(\psi) = L_N(\psi)$$

по определению и

$$L_N(\psi) \geqslant Q_{N-1}^N(\psi)$$

по лемме 1.2. Также из леммы 1.2 легко видеть, что

$$Q_{n+1}^N(\psi) \geqslant Q_n^N(\psi) \tag{1.19}$$

для всех $n = N-1, N-2, \ldots, 1$.

Таким образом, для любого $k = 1, \ldots, N$

$$L_N(\psi) \geqslant Q_k^N(\psi).$$

Очевидно, равенство в (1.18) достигается тогда и только тогда, когда равенства достигаются во всех неравенствах в (1.19), для всех $n = k, k+1, \ldots, N-1$. Это, в свою очередь, происходит по той же лемме 1.2 тогда и только тогда, когда

$$I_{\{l_n < cf^n + R_n^N\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_n \leqslant cf^n + R_n^N\}}(x^{(n)})$$

выполняется μ^n-почти наверное на T_n^ψ для всех $n = k, k+1, \ldots, N-1$. □

Из теоремы 1.3 легко получается следующее утверждение оптимальности

Следствие 1.2 *Для любого усеченного правила остановки $\psi \in \mathscr{F}^N$ справедливо неравенство*

$$L_N(\psi) \geqslant c + R_0^N,$$

где

$$R_0^N = \int V_1^N(x_1) d\mu(x_1).$$

Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда ψ_n удовлетворяют условию

$$I_{\{l_n < cf^n + R_n^N\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_n \leqslant cf^n + R_n^N\}}(x^{(n)})$$

μ^n-почти наверное на T_n^ψ, для любого $n = 1, 2, \ldots, N-1$.

Доказательство. Утверждение следствия следует из равенств

$$Q_1^N(\psi) = \int t_1^\psi \left(cf^1 + V_1^N\right) d\mu = c + \int V_1^N d\mu = c + R_0^N.$$

□

1.4 Структура оптимальных последовательных критериев. Общий случай

В этом параграфе дается характеристика структуры последовательного критерия, минимизирующего «функцию Лагранжа» $L(\psi)$ в общем случае. На протяжении параграфа предполагается выполнение условия регулярности C1.

Для любого правила остановки ψ и любого натурального числа $N \geqslant 1$ обозначим

$$L_N(\psi) = L_N(\psi; b, c) = L(\psi^N; b, c),$$

где $\psi^N = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N-1}, 1, \ldots)$ – правило остановки ψ, усеченное на этапе N.

Так как ψ^N – усеченное правило остановки, для него справедливы все результаты предыдущего параграфа, в частности, теорема 1.3.

Идея нижеследующего построения заключается в переходе к пределу при $N \to \infty$ в неравенстве (1.18) для получения некоторой нижней границы «риска» $L(\psi)$ и соотвествующих условий, при которых нижняя граница достигается.

Прежде всего покажем, что правая часть (1.18) имеет предел при $N \to \infty$ для любого $k = 1, 2, \ldots$. Для этого нам понадобится

Лемма 1.3 *Для любого натурального числа $n \geqslant 1$ и любого натурального числа $N \geqslant n$ имеет место двойное неравенство*

$$l_n \geqslant V_n^N \geqslant V_n^{N+1}.$$

Доказательство. Первое из неравенств, $l_n \geqslant V_n^N$, следует из соотношения (1.16).

Докажем второе неравенство, $V_n^N \geqslant V_n^{N+1}$, по индукции.

Пусть $n = N$. Тогда по определению V_n^N

$$\begin{aligned} V_N^{N+1} &= \min\{l_N, cf^N + R_N^{N+1}\} \\ &= \min\{l_N, cf^N + \int V_{N+1}^{N+1} d\mu(x_{N+1})\} \leqslant l_N = V_N^N. \end{aligned}$$

Предположим, что неравенство $V_n^N \geqslant V_n^{N+1}$ выполняется для некоторого n, $N \geqslant n > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} V_{n-1}^N &= \min\left\{l_{n-1}, cf^{n-1} + \int V_n^N d\mu(x_n)\right\} \\ &\geqslant \min\left\{l_{n-1}, cf^{n-1} + \int V_n^{N+1} d\mu(x_n)\right\} = V_{n-1}^{N+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $V_n^N \geqslant V_n^{N+1}$ выполняется также и для $n-1$, что завершает доказательство по индукции. □

Из леммы 1.3 следует, что для любого фиксированного $n \geqslant 1$ последовательность V_n^N, $N = 1, 2, \ldots$ невозрастающая. Следовательно, существует предел

$$V_n = \lim_{N\to\infty} V_n^N,$$

такой, что $V_n \leqslant l_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Вследствие этого правая часть (1.18), по теореме Лебега о монотонной сходимости сходится к

$$Q_k(\psi) = \sum_{n=1}^{k-1} \int s_n^\psi (cnf^n + l_n) d\mu^n + \int t_k^\psi \left(ckf^k + V_k\right) d\mu^k$$

для любого $k = 1, 2, \ldots$. По той же причине возможен переход к пределу в обеих частях (1.16), из чего следует

$$V_n = \min\{l_n, cf^n + R_n\},$$

где

$$R_n = R_n(x_1, \ldots, x_n) = \int V_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) d\mu(x_{n+1}),$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$.

Наконец, для возможности перехода к пределу в левой части (1.18) требуется сходимость

$$L_N(\psi) \to L(\psi)$$

при $N \to \infty$ по крайней мере для некоторого класса правил остановки ψ. Пусть $\mathscr{F}$ – класс таких правил остановки, что для любого $\psi \in \mathscr{F}$ выполняется

$$E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty,\ E\tau_\psi < \infty$$

и

$$\lim_{N\to\infty} L_N(\psi; b, c) = L(\psi; b, c)$$

для всех $b \in \mathrm{R}$ и $c > 0$ (первое из условий здесь требуется для корректности выражения (1.15), второе гарантирует выполнение условия $L(\psi; b, c) < \infty$).

Теперь переход к пределу в обеих частях (1.18) при $N \to \infty$ возможен для всех $\psi \in \mathscr{F}$, так что получаем

Лемма 1.4 *Для любого правила остановки $\psi \in \mathscr{F}$ и любого $k \geqslant 1$*

$$L(\psi) \geqslant Q_k(\psi),$$

где $Q_k(\psi)$ определяется как

$$Q_k(\psi) = \sum_{n=1}^{k-1} \int s_n^\psi (cnf^n + l_n) d\mu^n + \int t_k^\psi \left(ckf^k + V_k\right) d\mu^k,$$

а V_n для любого $n = 1, 2, \ldots$ определяется как

$$V_n = \lim_{N\to\infty} V_n^N.$$

В частности, для любого правила остановки $\psi \in \mathscr{F}$

$$L(\psi) \geqslant c + R_0. \tag{1.20}$$

Следующая лемма показывает, что нижняя граница в (1.20) является в действительности точной нижней гранью левой части (1.20).

Лемма 1.5 *Пусть $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ – любой такой подкласс правил остановки, что выполняется включение*

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi) = c + R_0.$$

Доказательство. Пусть $R_0 > -\infty$. Введем обозначения

$$U = \inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi),$$

$$U_N = \inf_{\psi \in \mathscr{F}^N} L(\psi).$$

По следствию 1.2

$$U_N = c + R_0^N$$

для любого $N = 1, 2, \ldots$. Очевидно,

$$U_N \geqslant U$$

для любого $N = 1, 2, \ldots$, следовательно,

$$\lim_{N \to \infty} U_N \geqslant U. \tag{1.21}$$

Покажем, что в (1.21) достигается равенство. Предположим противное: для некоторого $\epsilon > 0$ выполняется

$$\lim_{N \to \infty} U_N = U + 4\epsilon.$$

Из этого предположения следует, что

$$U_N \geqslant U + 3\epsilon \tag{1.22}$$

для всех достаточно больших N.

С другой стороны, по определению U существует такое правило остановки ψ, что

$$U \leqslant L(\psi) \leqslant U + \epsilon.$$

Так как для усеченной задачи выполняется условие

$$L_N(\psi) \to L(\psi)$$

при $N \to \infty$, имеем

$$L_N(\psi) \leqslant U + 2\epsilon$$

для всех достаточно больших N. Так как по определению

$$L_N(\psi) \geqslant U_N,$$

получаем

$$U_N \leqslant U + 2\epsilon$$

для всех достаточно больших N, что противоречит неравенству (1.22).

Равенство

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi) = c + R_0$$

следует из теоремы о монотонной сходимости, так как

$$\begin{aligned} U &= \lim_{N\to\infty} U_N = c + \lim_{N\to\infty} \int V_1^N(x) d\mu(x) \\ &= c + \int V_1(x) d\mu(x) = c + R_0. \end{aligned}$$

Если $R_0 = -\infty$, то из равенства

$$\lim_{N\to\infty} R_0^N = R_0$$

следует, что для любого $k > -\infty$ существует такой N, что

$$R_0^N \leqslant k.$$

Таким образом, из включения

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G}$$

следует, что

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi) \leqslant k.$$

Так как $k > -\infty$ произвольно, получаем

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi) = -\infty.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 1.4 *Пусть выполняется условие регулярности C2 и пусть $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ – любой такой подкласс правил остановки, что выполняется включение*

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G}$$

и справедливо условие

$$\inf_{\psi' \in \mathscr{G}} L(\psi') > -\infty.$$

Если существует правило остановки $\psi \in \mathscr{G}$, для которого выполняется

$$L(\psi) = \inf_{\psi' \in \mathscr{G}} L(\psi'), \tag{1.23}$$

то для него справедливо

$$I_{\{l_n < cf^n + R_n\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_n \leqslant cf^n + R_n\}}(x^{(n)}) \tag{1.24}$$

μ^n-почти наверное на T_n^{ψ} для любого $n = 1, 2, \ldots$ и выполняется условие

$$\int t_n^{\psi}(V_n - l_n) d\mu^n \to 0, \text{ при } n \to \infty. \tag{1.25}$$

С другой стороны, если для некоторого правила остановки $\psi \in \mathscr{G}$ имеют место соотношения (1.24) μ^n-почти наверное на T_n^{ψ} для любого $n = 1, 2, \ldots$ и (1.25), то для него также выполняется (1.23).

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{G}$ – любое правило остановки. По лемме 1.4 для любого фиксированного $n \geqslant 1$

$$L(\psi) \geqslant Q_n(\psi).$$

В частности,

$$L(\psi) \geqslant Q_1(\psi) = c + R_0.$$

Переходя к пределу по $N \to \infty$ в (1.19), имеем

$$Q_{n+1}(\psi) \geqslant Q_n(\psi), \tag{1.26}$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$, и таким образом

$$L(\psi) \geqslant Q_{n+1}(\psi) \geqslant Q_n(\psi) \geqslant c + R_0, \tag{1.27}$$

для любого $n = 1, 2, \dots$. Полагая

$$L(\psi) = \inf_{\psi' \in \mathscr{G}} L(\psi'),$$

по лемме 1.5 получаем, что во всех неравенствах в (1.27) достигаются равенства. В частности, равенство достигается в (1.26) для любого $n = 1, 2, \dots$.

Так как по условиям теоремы $R_0 > -\infty$, интегралы в обеих частях (1.26) конечны. Из леммы 1.2 получаем, что (1.24) выполняется μ^n-почти наверное на T_n^ψ, для любого $n = 1, 2, \dots$.

Теперь условие (1.25) следует из равенств

$$Q_n(\psi) = L_n(\psi) + \int t_n^\psi (V_n - l_n) d\mu^n = c + R_0 \qquad (1.28)$$

для любого $n = 1, 2, \dots$, и

$$\lim_{n \to \infty} L_n(\psi) = L(\psi) = c + R_0$$

по условию теоремы.

Теорема доказана в части необходимости.

Пусть теперь ψ удовлетворяют (1.24) μ^n-почти наверное на T_n^ψ для любого $n = 1, 2, \dots$ и пусть условие (1.25) выполняется для этого ψ.

Из леммы 1.2 следует, что

$$Q_n(\psi) = Q_{n-1}(\psi) = \dots = Q_1(\psi) = c + R_0$$

для любого $n = 1, 2, \dots$. Из равенств (1.28) и (1.25) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} L_n(\psi) = c + R_0.$$

Но $\psi \in \mathscr{G}$, поэтому

$$\lim_{n \to \infty} L_n(\psi) = L(\psi),$$

и таким образом

$$L(\psi) = c + R_0 = \inf_{\psi' \in \mathscr{G}} L(\psi').$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 1.2 *Вообще говоря, условие*

$$\inf_{\psi' \in \mathscr{G}} L(\psi') > -\infty.$$

может не выполняться.

Приведем пример, в котором

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b, c) = -\infty$$

для всех $b \in \mathrm{R}$ *и* $c > 0$.

Предположим, что $X_1, X_2, \ldots$ *независимы и что* X_n *нормально распределена со средним* $n\theta$ *и единичной дисперсией* ($X_n \sim \mathscr{N}(n\theta, 1)$), $n = 1, 2 \ldots$. *Также предположим, что* $H_0 : \theta = 0$ *и* $H_1 : \theta > 0$.

Пусть ψ^N *– правило остановки фиксированного объема наблюдений, основанное на* N *наблюдениях* ($\psi_1^N = \ldots = \psi_{N-1}^N = 0, \psi_N^N = 1$), $N = 1, 2, \ldots$. *Тогда легко видеть, что*

$$L(\psi^N; b, c) = cN + b\,\Phi\left(-\frac{b}{\sigma_N}\right) - \frac{\sigma_N}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma_N^2}\right\},$$

где

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 \sim N^3/3,$$

и таким образом,

$$L(\psi^N; b, c) \to -\infty$$

при $N \to \infty$, *для любого* $b \in \mathrm{R}$ *и* $c > 0$.

Как оказывается, все задачи проверки гипотез относительно условия

$$\inf_{\psi' \in \mathscr{G}} L(\psi') > -\infty$$

показывают следующее свойство:

Теорема 1.5 *Для любого семейства плотностей* $\{f_\theta^n,\ \theta \in \Theta,\ n = 1, 2, \ldots\}$ *конечномерных распределений процесса* $X_1, X_2, \ldots$, *удовлетворяющего условию регулярности C2, выполняется, что либо*

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b, c) > -\infty$$

для всех $b \in \mathrm{R}$ *и* $c > 0$, *либо*

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b, c) = -\infty$$

для всех $b \in \mathrm{R}$ *и* $c > 0$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что если

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b, c) > -\infty$$

выполняется для некоторых $b \in \mathrm{R}$ и $c > 0$, то

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b', c') > -\infty$$

для всех $b' \in \mathrm{R}$ и $c' \geqslant c$. В самом деле, если для любого $k > -\infty$ существует такой последовательный критерий (ψ, ϕ), где $\psi \in \mathscr{G}$, что

$$c' E\tau_\psi + b'\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_0(\psi, \phi) < k,$$

то справедливо неравенство

$$c' E\tau_\psi - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) < k - \min\{0, b'\},$$

и

$$\begin{aligned}
& cE\tau_\psi + b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \\
\leqslant\ & cE\tau_\psi - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) + \max\{0, b\} \\
<\ & c' E\tau_\psi - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) + \max\{0, b\} \\
\leqslant\ & k - \min\{0, b'\} + \max\{0, b\},
\end{aligned}$$

так что

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b, c) = -\infty.$$

Таким образом, проверить выполнение условия

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b, c) > -\infty,$$

для всех $b \in \mathrm{R}$ возможно простой проверкой условия

$$h(c) = \inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; 0, c) > -\infty.$$

Заметим, что $h : (0, \infty) \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$ – вогнутая функция как точняя нижняя грань семейства вогнутых (линейных) функций. К тому же она, очевидно, не убывает. Из этого легко следует, что либо $h(c) > -\infty$ для всех $c > 0$, либо $h(c) = -\infty$ для всех $c > 0$. $\square$

Утверждение теоремы 1.5 позволяет ввести следующее определение. Назовем задачу проверки гипотез *конечной*, если условие

$$\inf_{\psi \in \mathscr{G}} L(\psi; b, c) > -\infty$$

выполняется для всех $b \in \mathrm{R}$ и $c > 0$.

Для тех задач проверки гипотез, что не являются конечными, мы не можем дать иных рекомендаций, кроме как минимизации функции Лагранжа $L_N(\psi; b, c)$ для некоторых $b \in \mathrm{R}$ и $c > 0$ в классе $\mathscr{F}^N$ усеченных правил остановки с применением следствия 1.2. Для конечных же задач мы можем расчитывать на нахождение оптимальных неусеченных правил остановки с применением теоремы 1.4.

Можно сделать достаточное условие оптимальности в теореме 1.4 более практичным, потребовав выполнения условия регулярности C3. А именно, можно показать, что в таком случае класс правил остановки

$$\mathscr{G}_1 = \{\psi : E\tau_\psi < \infty, E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty\} \subset \mathscr{F}$$

удовлетворяет условиям леммы 1.5. Таким образом, по теореме 1.4 любое правило остановки ψ, удовлетворяющее соотношениям (1.24) и (1.25), будет оптимальным, если $\psi \in \mathscr{G}_1$.

Придадим сказанному строгий вид в следующей лемме.

Лемма 1.6 *Предположим, что условия регулярности C2 и C3 выполняются и что задача проверки гипотез конечна. Тогда справедливо включение*

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G}_1 \subset \mathscr{F}.$$

Доказательство. Включение $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G}_1$ очевидно. Докажем включение $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{F}$.

Пусть $\psi \in \mathscr{G}_1$ – любое правило остановки. Покажем, что $L_N(\psi) \to L(\psi)$ при $N \to \infty$. Для начала заметим, что $L(\psi)$ конечно. Это следует, с одной стороны, из леммы 1.5,

$$L(\psi) > c + R_0 > -\infty.$$

С другой стороны, из (1.15),

$$L(\psi) \leqslant E\tau_\psi < \infty.$$

Теперь по определению

$$L(\psi) - L_N(\psi) = \sum_{n=N}^{\infty} \int s_n^\psi (nf^n + l_n) d\mu^n - \int t_N^\psi N f^N d\mu^N - \int t_N^\psi l_N d\mu^N.$$

Для того, чтобы показать, что $L(\psi) - L_N(\psi) \to 0$ при $N \to \infty$, достаточно показать, что каждое из слагаемых в правой части последнего равенства стремится к 0.

Первое слагаемое стремится к нулю при $N \to \infty$ как хвост сходящегося ряда.

Второе слагаемое также стремится к нулю вследствие

$$\int t_N^\psi N f^N d\mu^N = NEt_N^\psi = NP(\tau_\psi \geqslant N) \to 0,$$

при $N \to \infty$, так как $E\tau_\psi < \infty$.

Остается показать, что третье слагаемое также стремится к нулю. Заметим, что

$$\int t_N^\psi l_N d\mu^N = E_{\theta_0} t_N^\psi \left(\min \left\{ 0, b - \dot{f}_{\theta_0}^N / f_{\theta_0}^n \right\} \right)$$

(из соотношения (1.3) легко видеть, что $\dot{f}_{\theta_0}^n = 0$ μ^n-почти наверное на $\{f_{\theta_0}^n = 0\}$). Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\left(\int t_N^\psi l_N d\mu^N \right)^2 \leqslant E_{\theta_0} (t_N^\psi)^2 E_{\theta_0} \left(\min \left\{ 0, b - \dot{f}_{\theta_0}^N / f_{\theta_0}^N \right\} \right)^2.$$

Так как

$$E_{\theta_0} (t_N^\psi)^2 \leqslant E_{\theta_0} t_N^\psi = P_0(\tau_\psi \geqslant N),$$

а

$$E_{\theta_0}(\min\left\{0, b - \dot f^N_{\theta_0}/f^N_{\theta_0}\right\})^2 \leqslant E_{\theta_0}(b - \dot f^N_{\theta_0}/f^N_{\theta_0})^2$$
$$\leqslant 2b^2 + 2E_{\theta_0}(\dot f^N_{\theta_0}/f^N_{\theta_0})^2 \leqslant 2b^2 + 2\gamma N,$$

для $N > N_0$ (вследствие условия регулярности C3), получаем

$$\left(\int t^\psi_N l_N d\mu^N\right)^2 \leqslant 2P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant N)(b^2 + \gamma N) \to 0$$

при $N \to \infty$, так как $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$. $\square$

1.5 Основной результат

Назовем последовательный критерий (ψ, ϕ) *регулярным*, если выполняется условие

$$\int t^\psi_n (V_n - l_n) d\mu^n \to 0$$

при $n \to \infty$.

Следующая теорема получается как следствие теорем 1.1, 1.2 и 1.4.

Теорема 1.6 *Предположим, что выполняются условия регулярности C1 и C2 и пусть $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ – некоторый подкласс правил остановки, такой, что*

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G},$$

и такой, что

$$\inf_{\psi' \in \mathscr{G}} L(\psi') > -\infty.$$

Пусть $c > 0$ и $b > 0$ – любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ такое, что

$$I_{\{l_n < cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_n \leqslant cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \quad (1.29)$$

μ^n-почти наверное на T^ψ_n для каждого $n = 1, 2, \ldots$, и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{bf^n_{\theta_0} < \dot f^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf^n_{\theta_0} \leqslant \dot f^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)}) \quad (1.30)$$

μ^n-почти наверное на S_n^ψ для каждого $n = 1, 2, \dots$.

Пусть $\psi \in \mathscr{G}$ и (ψ, ϕ) – регулярный критерий.

Тогда последовательный критерий (ψ, ϕ) – локально наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с $\psi' \in \mathscr{G}$ в том смысле, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'), \tag{1.31}$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \phi) \quad \text{и} \quad \mathscr{N}(\psi') \leqslant \mathscr{N}(\psi). \tag{1.32}$$

Неравенство (1.31) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (1.32).

Если во всех неравенствах в (1.31) и (1.32) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (1.29) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \dots$ (с ψ'_n вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (1.30) (с ϕ'_n вместо ϕ_n) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \dots$.

Замечание 1.3 *Ввиду леммы 1.6 в формулировке теоремы 1.6 условие*

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G}$$

можно заменить условием регулярности C3.

Замечание 1.4 *В условиях теоремы 1.6, если (ψ, ϕ) – регулярный критерий с правилом остановки (1.29) и правилом принятия решения (1.30) с $b < 0$ и $\psi \in \mathscr{G}$, то он является локально наиболее мощным в классе всех последовательных критериев (точного) размера $\alpha(\psi, \phi)$ (с равенством вместо второго неравенства в (1.31)).*

Аналогично, при тех же условиях, если (ψ, ϕ) – регулярный критерий с правилом остановки (1.29) и правилом принятия решения (1.30) с $b = 0$ и $\psi \in \mathscr{G}$, то он является локально наиболее мощным в том смысле, что для любого (ψ', ϕ'), с $\psi' \in \mathscr{G}$ таким, что

$$E\tau_{\psi'} \leqslant E\tau_\psi$$

выполняется

$$\dot{\beta}_0(\psi,\phi) \geqslant \dot{\beta}_0(\psi',\phi'),$$

безотносительно соответствующих вероятностей ошибок I рода, с соответствующим изменением теоремы 1.6.

Интересно заметить, что если (ψ,ϕ) – регулярный критерий с правилом остановки (1.29) и правилом принятия решения (1.30) с $b<0$, то критерий $(\psi,\bar{\phi})$, где, по определению, $\bar{\phi}=(1-\phi_1,1-\phi_2,\dots)$, является локально наиболее мощным в смысле теоремы 1.6 для проверки $H_0:\theta=\theta_0$ при альтернативе $H_1:\theta<\theta_0$. Чтобы сформулировать это строго, нам необходимы дополнительные результаты.

Пусть для любого $b\in\mathrm{R}$ и $c>0$

$$\bar{L}(\psi)=\bar{L}(\psi;b,c)=\inf_{\phi}(cE\tau_\psi+b\alpha(\psi,\phi)+\dot{\beta}_0(\psi,\phi)),$$

и $\bar{L}_N(\psi;b,c)=\bar{L}(\psi^N;b,c)$, где $\psi^N=(\psi_1,\dots,\psi_{N-1},1,\dots)$.

Теорема 1.7 *Предположим, что выполняются условия регулярности C1 и C2.*

Пусть $c>0$ и $b\in\mathrm{R}$ – произвольные константы.

Пусть $\mathscr{G}$ – некоторый класс критериев, такой, что

$$\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathscr{F}^N\subset\mathscr{G},$$

и такой, что

$$L_N(\psi;b,c)\to L(\psi;b,c)$$

и

$$\bar{L}_N(\psi;-b,c)\to\bar{L}(\psi;-b,c),$$

при $N\to\infty$, для всех $\psi\in\mathscr{G}$.

Тогда для правила остановки $\psi\in\mathscr{G}$

$$L(\psi;b,c)=\inf_{\psi'\in\mathscr{G}}L(\psi';b,c)$$

тогда и только тогда, когда

$$\bar{L}(\psi;-b,c)=\inf_{\psi'\in\mathscr{G}}\bar{L}(\psi';-b,c).$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{G}$ такое, что

$$\bar{L}(\psi; -b, c) = \inf_{\psi' \in \mathscr{G}} \bar{L}(\psi'; -b, c). \tag{1.33}$$

По теореме 1.4, из (1.33) следует, что ψ определяется посредством функций $\bar{l}_n = \min\{0, -bf^n_{\theta_0} + \dot{f}^n_{\theta_0}\}$ и $\bar{V}_n = \lim_{N\to\infty} \bar{V}^N_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где

$$\bar{V}^N_n = \min\{\bar{l}_n, cf^n + \int \bar{V}^N_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}$$

$n = N-1, N-2, \ldots, 1$, и где $V^N_N \equiv \bar{l}_N$.

Заметим, что

$$\bar{l}_n = \min\{0, bf^n_{\theta_0} - \dot{f}^n_{\theta_0}\} - bf^n_{\theta_0} + \dot{f}^n_{\theta_0} = l_n - bf^n_{\theta_0} + \dot{f}^n_{\theta_0}. \tag{1.34}$$

Используя этот факт, легко видеть, что для любого $N = 1, 2, \ldots$

$$\bar{V}^N_n = V^N_n - bf^n_{\theta_0} + \dot{f}^n_{\theta_0}, \tag{1.35}$$

μ^n-почти наверное для любого $n = N, N-1, \ldots, 1$.

В самом деле, (1.35) выполняется для $n = N$ вследствие (1.34). Предположим теперь, что (1.35) выполняется для некоторого $n = k$. Тогда

$$\bar{V}^N_{k-1} = \min\left\{\bar{l}_{k-1}, cf^{k-1} + \int \bar{V}^N_k d\mu(x_k)\right\}$$

$$= \min\left\{\bar{l}_{k-1}, cf^{k-1} + \int (V^N_k - bf^k_{\theta_0} + \dot{f}^k_{\theta_0}) d\mu(x_k)\right\}$$

$$= \min\left\{\bar{l}_{k-1}, cf^{k-1} + \int V^N_k d\mu(x_k) - bf^{k-1}_{\theta_0} + \dot{f}^{k-1}_{\theta_0}\right\},$$

μ^{k-1}-почти наверное, так как

$$\int f^k_{\theta_0}(x_1, \ldots, x_k) d\mu(x_k) = f^k_{\theta_0}(x_1, \ldots, x_{k-1})$$

и

$$\int \dot{f}^{k-1}_{\theta_0}(x_1, \ldots, x_k) d\mu(x_k) = \dot{f}^{k-1}_{\theta_0}(x_1, \ldots, x_{k-1})$$

μ^{k-1}-почти наверное (последнее легко следует из (1.3)). Теперь из (1.34) следует, что (1.35) также выполняется для $n = k-1$, μ^{k-1}-почти наверное.

Теперь, переходя к пределу при $N \to \infty$, в (1.35), имеем

$$\bar{V}_n = V_n - bf^n_{\theta_0} + \dot{f}^n_{\theta_0}, \tag{1.36}$$

μ^n-почти наверное.

Так как по теореме 1.4

$$I_{\{\bar{l}_n < cf^n + \int \bar{V}_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{\bar{l}_n \leqslant cf^n + \int \bar{V}_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)})$$

μ^n-почти наверное на T^ψ_n, из (1.34) и (1.36) следует, что

$$I_{\{l_n < cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_n \leqslant cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \tag{1.37}$$

μ^n-почти наверное на T^ψ_n, $n = 1, 2, \dots$.

В дополнение к этому

$$\int t^\psi_n (V_n - l_n) d\mu^n = \int t^\psi_n (\bar{V}_n - \bar{l}_n) d\mu^n \to 0, \tag{1.38}$$

при $n \to \infty$.

Покажем теперь, что задача проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ конечна.

Из (1.33) следует, что

$$cE\tau_\psi - b\alpha(\psi, \phi) + \dot{\beta}_0(\psi, \phi) > k > -\infty \tag{1.39}$$

для всех $\psi \in \mathscr{G}$ и для всех решающих правил ϕ. Пусть теперь $\bar{\phi}_n = 1 - \phi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\alpha(\psi, \phi) = \sum_{n=1}^\infty E_0 s^\psi_n \phi_n = 1 - \sum_{n=1}^\infty E_0 s^\psi_n \bar{\phi}_n$, и

$$\dot{\beta}_0(\psi, \phi) = \sum_{n=1}^\infty \int \dot{f}^n_{\theta_0} s^\psi_n \phi_n d\mu^n = \sum_{n=1}^\infty \int \dot{f}^n_{\theta_0} s^\psi_n d\mu^n - \sum_{n=1}^\infty \int \dot{f}^n_{\theta_0} s^\psi_n \bar{\phi}_n d\mu^n.$$

Из (1.39) теперь следует, что

$$cE\tau_\psi + b\alpha(\psi, \bar{\phi}) - \dot{\beta}_0(\psi, \bar{\phi}) + \sum_{n=1}^\infty \int \dot{f}^n_{\theta_0} s^\psi_n d\mu^n > k + b. \tag{1.40}$$

Пусть $\tilde{\phi}_n \equiv 1$. Тогда по условию регулярности C2

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \int f^n_\theta s^\psi_n \tilde{\phi}_n d\mu^n \right)'_\theta \Bigg|_{\theta=\theta_0} = \sum_{n=1}^\infty \int \dot{f}^n_{\theta_0} s^\psi_n d\mu^n \leqslant 0,$$

так как $\sum_{n=1}^{\infty}\int f_{\theta}^n s_n^{\psi}\tilde{\phi}_n d\mu^n = P_{\theta}(\tau_{\psi} < \infty) = 1$ для $\theta = \theta_0$, и меньше или равна 1 для любого другого θ. Из (1.40) имеем, что

$$cE\tau_{\psi} + b\alpha(\psi, \bar{\phi}) - \dot{\beta}_0(\psi, \bar{\phi}) > k + b,$$

и следовательно

$$\inf_{\psi\in\mathscr{G}} L(\psi; b, c) \geqslant k + b > -\infty. \tag{1.41}$$

Из (1.37), (1.38) и (1.41), теоремы 1.4, следует, что

$$L(\psi; b, c) = \inf_{\psi'} L(\psi'; b, c). \tag{1.42}$$

По аналогии можно показать, что если ψ удовлетворяет (1.42), то оно также удовлетворяет (1.33). $\square$

Используя теорему 1.1 и теорему 1.2, получаем из теоремы 1.7 следующую

Теорема 1.8 *Предположим, что выполняются условия регулярности C1 и C2 и пусть $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ – некоторый подкласс правил остановки, такой, что*

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{F}^N \subset \mathscr{G},$$

и такой, что

$$\inf_{\psi'\in\mathscr{G}} L(\psi') > -\infty.$$

Пусть $c > 0$ и $b < 0$ – любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ такое, что

$$I_{\{l_n < cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_n \leqslant cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \tag{1.43}$$

μ^n-почти наверное на T_n^{ψ} для каждого $n = 1, 2, \ldots,$ и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{\dot{f}_{\theta_0}^n < bf_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \leqslant \bar{\phi}_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{\dot{f}_{\theta_0}^n \leqslant bf_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \tag{1.44}$$

μ^n-почти наверное на S_n^{ψ} для каждого $n = 1, 2, \ldots .$

Пусть $\psi \in \mathscr{G}$ и (ψ, ϕ) – регулярный критерий.

Тогда последовательный критерий $(\psi, \bar{\phi})$ – локально наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta < \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с $\psi' \in \mathscr{G}$ в том смысле, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \bar{\phi}) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'), \tag{1.45}$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \bar{\phi}) \quad \text{и} \quad \mathscr{N}(\psi') \leqslant \mathscr{N}(\psi). \tag{1.46}$$

Неравенство (1.45) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (1.46).

Если во всех неравенствах в (1.45) и (1.46) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (1.43) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (с ψ'_n вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (1.44) (с ϕ'_n вместо $\bar{\phi}_n$) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

1.6 Примеры: марковские процессы с дискретным временем и процесс авторегрессии AR(1).

Марковские процессы. В этом параграфе теорема 1.6 применяется для построения локально наиболее мощного последовательного критерия проверки гипотезы о параметре распределения марковского процесса.

Пусть при значении параметра $\theta = \theta_0$ условная «плотность» X_n при X_{n-1} равна

$$f_{\theta_0, j}(x_j |\, x_{j-1}), \quad n = 2, 3, \ldots$$

и пусть $f_{\theta_0}(x_1)$ – начальная «плотность» (все плотности понимаются по отношению к некоторой сигма-конечной мере μ). В этом случае совместная плотность функции $(X_1, \ldots, X_n)$ при значении параметра $\theta = \theta_0$ равна

$$f_{\theta_0}^n = f_{\theta_0}^n(x_1, \ldots, x_n) = f_{\theta_0}(x_1) \prod_{j=2}^{n} f_{\theta_0, j}(x_j |\, x_{j-1}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Для всех $n = 1, 2, \ldots$ определим

$$z_n = \begin{cases} \dot{f}^n_{\theta_0}/f^n_{\theta_0}, \text{ если } f^n_{\theta_0} > 0, \\ \infty, \text{ если } f^n_{\theta_0} = 0, \ \dot{f}^n_{\theta_0} \neq 0, \\ 0, \text{ если } f^n_{\theta_0} = 0, \ \dot{f}^n_{\theta_0} = 0. \end{cases}$$

Пусть $g(z) = \min\{0, z\}$, $z \in \mathrm{R}$. Определим следующее семейство функций $v^n_k = v^n_k(z, x)$, $k = 0, 1, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$. Положим

$$v^0_k(z, x) = g(z) = \min\{0, z\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

и пусть для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$v^n_{k-1}(z, x) = \min\left\{ g(z), c + \int v^{n-1}_k \left(z + \frac{\dot{f}_{\theta_0,k}(x_k|x)}{f_{\theta_0,k}(x_k|x)}, x_k \right) f_{\theta_0,k}(x_k|x) d\mu(x_k) \right\} \tag{1.47}$$

для $k \geqslant 2$ и

$$v^n_0(z, x) = \min\left\{ g(z), c + \int v^{n-1}_1 \left(z + \frac{\dot{f}_{\theta_0,1}(x_1)}{f_{\theta_0,1}(x_1)}, x_1 \right) f_{\theta_0,1}(x_1) d\mu(x_1) \right\}. \tag{1.48}$$

Несложно показать по индукции, что

$$V^N_N(x_1, \ldots, x_N) = v^0_N(b - z_N, x_N) f^N_{\theta_0}(x_1, \ldots, x_N)$$

и

$$V^N_k(x_1, \ldots, x_k) = v^{N-k}_k(b - z_k, x_k) f^n_{\theta_0}(x_1, \ldots, x_n)$$

для $k = N-1, N-2, \ldots, 1$ и что

$$R^N_{k-1} = \int v^{N-k}_k(b - z_{k-1}, x_k) f_{\theta_0,k}(x_k|x_{k-1}) d\mu(x_{k+1}) f^{k-1}_{\theta_0}. \tag{1.49}$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1.3, нетрудно видеть, что для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$v^N_n(z, x) \geqslant v^{N+1}_n(z, x), \quad N = 0, 1, 2, \ldots,$$

и таким образом, существует предел

$$v_n(z, x) = \lim_{N \to \infty} v^N_n(z, x). \tag{1.50}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (1.47), получаем

$$v_{k-1}(z,x) = \min\left\{g(z), c + \int v_k\left(z + \frac{\dot f_{\theta_0,k}(x_k|x)}{f_{\theta_0,k}(x_k|x)}, x_k\right) f_{\theta_0,k}(x_k|x) d\mu(x_k)\right\} \tag{1.51}$$

для $k \geqslant 2$ и и аналогично для (1.48)

$$v_0(z,x) = \min\left\{g(z), c + \int v_1\left(z + \frac{\dot f_{\theta_0,1}(x_1)}{f_{\theta_0,1}(x_1)}, x_1\right) f_{\theta_0,1}(x_1) d\mu(x_k)\right\}. \tag{1.52}$$

Обозначим интеграл в правой части (1.51) за $r_{k-1}(z,x)$, так что (1.51) запишется как

$$v_{k-1}(z,x) = \min\{g(z), c + r_{k-1}(z,x)\},$$

где

$$r_{k-1}(z,x) = \int v_k\left(z + \frac{\dot f_{\theta_0,k}(x_k|x)}{f_{\theta_0,k}(x_k|x)}, x_k\right) f_{\theta_0,k}(x_k|x) d\mu(x_k). \tag{1.53}$$

Аналогично, (1.52) равносильно

$$v_0(z,x) = \min\{g(z), c + r_0(z,x)\},$$

где

$$r_0(z,x) = \int v_k\left(z + \frac{\dot f_{\theta_0,1}(x_1)}{f_{\theta_0,1}(x_1)}, x_1\right) f_{\theta_0,1}(x_1) d\mu(x_1).$$

Наконец, переходя к пределу при $N \to \infty$ в (1.49), получаем для $k \geqslant 2$

$$R_{k-1} = r_{k-1}(b - z_{k-1}, x_{k-1}) f_{\theta_0}^{k-1}$$

и

$$R_0 = r_0(b).$$

Используя полученные выражения, из теоремы 1.6 немедленно получаем

Теорема 1.9 *Предположим, что выполняются условия теоремы 1.6. Пусть $c > 0$ и $b > 0$ – любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ такое, что*

$$I_{\{g(b-z_n) < c + r_n(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{g(b-z_n) \leqslant c + r_n(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \tag{1.54}$$

μ^n-почти наверное на $T_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{b<z_n\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{b\leqslant z_n\}}(x^{(n)}) \tag{1.55}$$

μ^n-почти наверное на $S_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\psi \in \mathscr{G}$ и (ψ, ϕ) – регулярный критерий.

Тогда последовательный критерий (ψ, ϕ) – локально наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с $\psi' \in \mathscr{G}$ в том смысле, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'), \tag{1.56}$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \phi) \quad \text{и} \quad \mathscr{N}(\psi') \leqslant \mathscr{N}(\psi). \tag{1.57}$$

Неравенство (1.56) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (1.57).

Если во всех неравенствах в (1.56) и (1.57) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (1.54) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (с ψ'_n вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (1.55) (с ϕ'_n вместо ϕ_n) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Нетрудно доказать, что функции $r_n(z, c)$, $n = 0, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots$, определяемые соотношениями (1.53), обладают следующими свойствами:

1) $r_n(z, c) \leqslant g(z)$, $z \in \mathrm{R}$,

2) $r_n(z, c)$ как функция $z \in \mathrm{R}$ вогнута и непрерывна,

3) $r_n(z, c)$ как функция $z \in \mathrm{R}$ не убывает,

4) $z - r_n(z, c)$ как функция $z \in \mathrm{R}$ не убывает,

5) $g(z) - r_n(z, c) \to 0$ при $z \to \pm\infty$.

Вследствие этого нетрудно вывести, что если $c + r_n(z, c) \leqslant 0$, то в каждой из областей $\{z \leqslant 0\}$ и $\{z \geqslant 0\}$ существует единственное решение уравнения

$$c + r_n(z, c) = g(z), \tag{1.58}$$

$A_n = A_n(c) \leqslant 0$ и $B_n = B_n(c) \geqslant 0$. Обозначим в этом случае $\Delta_n = \Delta_n(c) = (A_n(c), B_n(c))$ и $\bar{\Delta}_n = \bar{\Delta}_n(c) = [A_n(c), B_n(c)]$. Если $c + r_n(z, c) > 0$, положим $\Delta_n(c) = \bar{\Delta}_n(c) = \emptyset$. Тогда легко видеть, что (1.54) эквивалентно

$$I_{\{b - z_n \in \Delta_n(c)\}} \leqslant 1 - \psi_n \leqslant I_{\{b - z_n \in \bar{\Delta}_n(c)\}}.$$

Если марковский процесс однородный, то есть

$$f_{\theta_0, j}(x_j | x_{j-1}) = f_{\theta_0}(x_j | x_{j-1})$$

для всех $j = 2, 3, \dots$, то, очевидно, $r_n(z, c) = r_1(z, c)$ для всех $n = 2, 3, \dots$ и таким образом $A_n(x) = A(x)$, $B_n(x) = B(x)$.

Процесс авторегрессии AR(1). Рассмотрим локально наиболее мощный последовательный критерий для параметра сдвига в процессе авторегрессии AR(1).

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – марковский процесс, определяемый соотношением

$$X_{n+1} - \theta = a(X_n - \theta) + \epsilon_n \tag{1.59}$$

для $n = 1, 2, \dots$, где $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией плотности $f(x)$ (относительно меры Лебега λ на числовой прямой). Также предположим, что X_1 независима от $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots)$. Используем результаты, полученные выше, для построения локально наиболее мощного последовательного критерия для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в предположении, что a – известная фиксированная константа.

Для такого процесса

$$f_{\theta, i}(x_i | x_{i-1}) = f(x_i - a x_{i-1} - \theta(1 - a)),$$

$i = 2, 3 \dots$. Пусть $f_\theta = h(x - \theta)$ – начальная плотность X_1 относительно λ при H_0.

Совместная функция плотности представляется как

$$f_\theta^n(x_1, \dots, x_n) = h(x_1 - \theta) \prod_{i=2}^{n} f(x_i - a x_{i-1} - \theta(1 - a)).$$

Применим теорему 1.9 для построения критерия, максимизирующего производную функции мощности в классе таких последовательных критериев, что $\alpha(\psi, \phi) \leqslant \alpha$, $\mathscr{N}(\psi) \leqslant \mathscr{N}$ для некоторых α и $\mathscr{N}$.

Начнем с определения

$$v_0(z) = g(z)$$

Вычислим интеграл в правой части (1.47):

$$\int v^{n-1}\left(z + \frac{\dot{f}_{\theta_0,k}(x_k|x)}{f_{\theta_0,k}(x_k|x)}, x_k\right) f_{\theta_0,k}(x_k|x) d\mu(x_k)$$

$$= \int v^{n-1}\left(z + (a-1)\frac{\dot{f}(x_i - ax_{i-1} - \theta(1-a))}{f(x_i - ax_{i-1} - \theta(1-a))}\right) f(x_i - ax_{i-1} - \theta(1-a)) d\lambda(x)$$

$$= \int v^{n-1}\left(z + (a-1)\frac{\dot{f}(y)}{f(y)}\right) f(y) d\lambda(y).$$

вследствие инвариантности меры Лебега. Видим, что интеграл не зависит от x, и таким образом (1.47) превращается в

$$v^n(z,x) = \min\left\{g(z), c + \int v^{n-1}\left(z + (a-1)\frac{\dot{f}(y)}{f(y)}\right) f(y) d\lambda(y)\right\} \tag{1.60}$$

и применима для любого $n = 1, 2, \ldots$. Переходя к переделу

$$v(z) = \lim_{n\to\infty} v^n(z) \tag{1.61}$$

(см. 1.50), из 1.60 получаем

$$v(z) = \min\{g(z), c + r(z)\},$$

где

$$r(z) = r_k(z,x) = \int v\left(z + (a-1)\frac{\dot{f}(y)}{f(y)}\right) f(y) d\lambda(y). \tag{1.62}$$

Теорема 1.9, примененная к рассматирваемому частному случаю, теперь дает все локально наиболее мощные последовательные критерии в следующем виде.

Теорема 1.10 *Предположим, что выполняются условия теоремы 1.6. Пусть $c > 0$ и $b > 0$ – любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ такое, что*

$$I_{\{g(b-z_n)<c+r(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{g(b-z_n)\leqslant c+r(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \qquad (1.63)$$

μ^n-почти наверное на $T_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{b<z_n\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{b\leqslant z_n\}}(x^{(n)}) \qquad (1.64)$$

μ^n-почти наверное на $S_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\psi \in \mathscr{G}$ и (ψ, ϕ) – регулярный критерий.

Тогда последовательный критерий (ψ, ϕ) – локально наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с $\psi' \in \mathscr{G}$ в том смысле, что

$$\dot\beta_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot\beta_{\theta_0}(\psi', \phi'), \qquad (1.65)$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \phi) \quad и \quad \mathscr{N}(\psi') \leqslant \mathscr{N}(\psi). \qquad (1.66)$$

Неравенство (1.65) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (1.66).

Если во всех неравенствах в (1.65) и (1.66) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (1.63) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (с ψ_n' вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (1.64) (с ϕ_n' вместо ϕ_n) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

По аналогии с рассуждениями в предыдущем подразделе нетрудно вывести, что если $c + r(z, c) \leqslant 0$, то в каждой из областей $\{z \leqslant 0\}$ и $\{z \geqslant 0\}$ существует единственное решение уравнения

$$c + r(z, c) = g(z), \qquad (1.67)$$

$A = A(c) \leqslant 0$ и $B = B(c) \geqslant 0$. Обозначим в этом случае $\Delta = \Delta(c) = (A(c), B(c))$ и $\bar\Delta = \bar\Delta(c) = [A(c), B(c)]$. В случае если $c + r(z, c) > 0$, пусть

$\Delta(c) = \bar{\Delta}(c) = \emptyset$. Тогда легко видеть, что (1.63) эквивалентно

$$I_{\{b-z_n \in \Delta(c)\}} \leqslant 1 - \psi_n \leqslant I_{\{b-z_n \in \bar{\Delta}(c)\}}.$$

Глава 2

Локально наиболее мощный последовательный критерий для независимых наблюдений

В настоящей главе строится локально наиболее мощный последовательный критерий для случая независимых наблюдений. Результаты данной главы получаются при более слабых, чем в главе 1, условиях на вероятностную модель. Также в настоящей главе выводятся неравенства, связывающие производную функции мощности критерия с другими характеристиками критерия, средним объемом наблюдений и вероятностью ошибки первого рода (теорема 2.1), представляющие самостоятельный интерес. В конце главы в качестве примеров строятся локально наиболее мощные критерии для случаев «периодических» и «конечно-нестационарных» наблюдений.

2.1 Постановка задачи

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – случайный процесс с дискретным временем с независимыми значениями, распределение которого, P_θ, зависит от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, где Θ – открытое подмножество в R. Рассматривается задача проверки простой гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при сложной альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$, где $\theta_0 \in \Theta$ – некоторое фиксированное значение параметра.

Предположим, что X_j имеет «функцию плотности» $f_{\theta,j}$ (производная

Радона-Никодима ее распределения) относительно некоторой сигма-конечной меры μ на пространстве «значений» X_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$.

Вследствие независимости наблюдений для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ «вектор» $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ первых n наблюдений имеет «плотность»

$$f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{\theta,j}(x_j)$$

относительно произведения мер

$$\mu^n \;=\; \underbrace{\mu \otimes \mu \otimes \cdots \otimes \mu}_{n \quad \text{раз}}.$$

Будем предполагать (когда это потребуется) выполнение следующих условий.

Условие C1'. *Для любого $j \geqslant 1$ существует такая интегрируемая (относительно меры μ) функция $\dot{f}_{\theta_0,j}$, что*

$$\int \left| f_{\theta,j} - f_{\theta_0,j} - (\theta - \theta_0)\dot{f}_{\theta_0,j} \right| d\mu = o(\theta - \theta_0)$$

при $\theta \to \theta_0$.

Условие регулярности C1' представляет собой по сути условие дифференцируемости (по Фреше) маргинальной плотности в пространстве $L_1(\mu)$ интегрируемых относительно меры μ функций.

Для независимых и одинаково распределенных наблюдений условие регулярности C1 совпадает с Assumption 1 в работе [15]. Для независимых наблюдений из выполнения условия регулярности C1 следует выполнение условия регулярности C1' и наоборот.

Пусть

$$I_j(\theta_0, \theta_1) = E_{\theta_0} \ln \frac{f_{\theta_0,j}(X_j)}{f_{\theta_1,j}(X_j)} \tag{2.1}$$

– различающая информация по Кульбаку-Лейблеру между распределенями X_j при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$, $j = 1, 2, \ldots$.

Условие C2'. *Существуют такие $\delta > 0$ и $0 < \gamma_1 < \infty$, что*

$$I_j(\theta_0, \theta)/(\theta - \theta_0)^2 \leqslant \gamma_1 \tag{2.2}$$

для всех $j = 1, 2, \dots$ *и для всех* $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$.

Нетрудно видеть, что условие регулярности C1' гарантирует дифференцируемость функции мощности любого критерия, основанного на фиксированном числе наблюдений, и возможность ее дифференцирования под знаком интеграла. Таким образом, в случае н.о.р. наблюдений условие регулярности C2' влечет выполнение Assumption 3 в [15].

Отметим, что имеет место равенство

$$\frac{\dot{f}^n_{\theta_0}(x_1, \dots, x_n)}{f^n_{\theta_0}(x_1, \dots, x_n)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{f}_{\theta_0,j}(x_j)}{f_{\theta_0,j}(x_j)}.$$

Условие C3'. *Существует* $0 < \gamma_2 < \infty$ *такое, что*

$$E_{\theta_0} \left| \frac{\dot{f}_{\theta_0,j}(X_j)}{f_{\theta_0,j}(X_j)} \right| \leqslant \gamma_2$$

для всех $j = 1, 2, \dots$.

Здесь и всюду далее в этом параграфе предполагается, что математическое ожидание относительно любой «функции плотности» распределения $f(x)$

$$Eg(X) = \int g(x) f(x)\, d\mu(x)$$

понимается как

$$Eg(X) = \int g(x) f(x) I_{\{f(x) \neq 0\}}\, d\mu(x),$$

благодаря чему исключается необходимость особого определении $g(x)$ на множестве $\{x: \ f(x) = 0\}$.

Условие регулярности C3' является более слабым, чем условие регулярности C3 или Assumption 4 в [15] для независимых одинаково распределенных наблюдений, в котором требуется конечность информации Фишера. В частности, если информация Фишера

$$I_j(\theta_0) = E_{\theta_0} \left(\frac{\dot{f}_{\theta_0,j}(X_j)}{f_{\theta_0,j}(X_j)} \right)^2 \leqslant \gamma_2^2 \qquad (2.3)$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$, то из неравенства Гельдера следует, что условие регулярности С3' выполнено.

В случае одинаково распределенных наблюдений условие регулярности С3' является следствием условия регулярности С1', которое гарантирует существование конечного $E_{\theta_0}|\dot{f}_{\theta_0,j}(X_j)/f_{\theta_0,j}(X_j)|$.

Условие регулярности С3' тесно связано с условием регулярности С2', поскольку при достаточно общих предположениях регулярности статистического эксперимента

$$I_j(\theta, \theta + h) \sim I_j(\theta) h^2/2 \text{ при } h \to 0.$$

Основная цель данной главы – характеризация критериев (ψ, ϕ), максимизирующих производную функции мощности в $\theta = \theta_0$, $\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)$, в классе последовательных критериев уровня α

$$\alpha(\psi, \phi) \leqslant \alpha \tag{2.4}$$

со средним объемом наблюдений, не превосходящим $\mathscr{N}$,

$$\mathscr{N}(\psi) \leqslant \mathscr{N} \tag{2.5}$$

где $\alpha \in [0, 1)$ и $\mathscr{N} \geqslant 1$ – некоторые ограничения.

2.2 Дифференцируемость функции мощности и информационные неравенства для характеристик критериев

В этом параграфе мы докажем существование производной от функции мощности любого критерия с конечным, при нулевой гипотезе, средним объемом наблюдений, и выводим неравенства, связывающие эту производную с другими характеристиками критерия: средним объемом наблюдений и вероятностью ошибки первого рода.

Определим информацию Кульбака-Лейблера, содержащуюся в наблюдениях процесса $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ до случайного момента остановки, определяемого правилом ψ, как

$$I(\theta_0,\theta;\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \left(\sum_{j=1}^{n} \ln \frac{f_{\theta_0,j}}{f_{\theta,j}} \right)$$

(отметим, что случайный процесс наблюдений $X_1, X_2, \ldots$ участвует в определении $(I(\theta_0,\theta;\psi))$ неявным образом, через посредство $s_n^{\psi} = s_n^{\psi}(X_1,\ldots,X_n)$ и $f_{\theta,j} = f_{\theta,j}(X_j)$, так же как и в определении информации в одном наблюдении в

$$I_j(\theta_0,\theta_1) = E_{\theta_0} \ln \frac{f_{\theta_0,j}(X_j)}{f_{\theta_1,j}(X_j)}.$$

Следующие две леммы будут полезны для оценок, связанных с информационным количеством Кульбака-Лейблера.

Первая из них фактически является вариантом неравенства Йенсена, приспособленным к последовательным экспериментам.

Лемма 2.1 *Пусть $G : [0,\infty) \mapsto \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ – любая выпуклая функция и пусть $a_n = a_n(x_1,\ldots,x_n)$, $b_n = b_n(x_1,\ldots,x_n)$, $n = 1,2,\ldots$ – любые последовательности неотрицательных измеримых функций. Тогда если выполняется условие*

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} a_n < \infty,$$

то имеет место неравенство

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} a_n G(b_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} a_n} \geqslant G\left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} a_n b_n}{\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} a_n} \right).$$

В частности, применяя лемму 2.1 к $G(x) = -\ln(x)$, $a_n \equiv 1$, $b_n = f_\theta^n / f_{\theta_0}^n$, и предполагая, что

$$P_{\theta_0}(\tau_\psi < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} = 1,$$

получаем, что

$$I(\theta_0,\theta;\psi) \geqslant -\ln\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta} s_n^{\psi} \right) \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Пусть теперь (ψ,ϕ) - любой последовательный критерий с $P_{\theta_0}(\tau_\psi<\infty)=1$. Предположим, что $0<\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)<1$. Тогда

$$\begin{aligned} I(\theta_0,\theta;\psi) &= \beta_{\theta_0}(\psi,\phi)\frac{\sum_{n=1}^\infty E_{\theta_0}s_n^\psi\phi_n(-\ln(b_n))}{\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)} \\ &+ (1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))\frac{\sum_{n=1}^\infty E_{\theta_0}s_n^\psi(1-\phi_n)(-\ln(b_n))}{1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где по-прежнему $b_n=f_\theta^n/f_{\theta_0}^n$. Поэтому применяя лемму 2.1 к каждой из дробей в правой части (2.7), получаем

$$\begin{aligned} I(\theta_0,\theta;\psi) &\geqslant -\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)\ln\frac{\sum_{n=1}^\infty E_{\theta_0}s_n^\psi\phi_n b_n}{\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)} \\ &\quad -(1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))\ln\frac{\sum_{n=1}^\infty E_{\theta_0}s_n^\psi(1-\phi_n)b_n}{1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)} \\ &\geqslant -\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)\ln\frac{\sum_{n=1}^\infty E_{\theta}s_n^\psi\phi_n}{\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)} \\ &\quad -(1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))\ln\frac{\sum_{n=1}^\infty E_{\theta}s_n^\psi(1-\phi_n)}{1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)} \\ &\geqslant -\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)\ln\frac{\beta_\theta(\psi,\phi)}{\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)}-(1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))\ln\frac{1-\beta_\theta(\psi,\phi)}{1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)}, \end{aligned}$$

то есть

$$I(\theta_0,\theta;\psi)\geqslant\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)\ln\frac{\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)}{\beta_\theta(\psi,\phi)}+(1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))\ln\frac{1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)}{1-\beta_\theta(\psi,\phi)} \tag{2.8}$$

(более общие неравенства информационного типа можно найти в [3], [4], [5], [6], см., например, лемму 5.1 [3]).

Точно так же получаем, что если $\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)=0$, то

$$I(\theta_0,\theta;\psi)\geqslant-\ln(1-\beta_\theta(\psi,\phi)), \tag{2.9}$$

и если $\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)=1$, то

$$I(\theta_0,\theta;\psi)\geqslant-\ln\beta_\theta(\psi,\phi), \tag{2.10}$$

Следующая лемма (тождество Вальда для разнораспределенных слагаемых) полезна, в частности, для оценки информации в левой части (2.8).

Лемма 2.2 *Пусть $Y_j = Y_j(X_j)$ - неотрицательные измеримые функции от наблюдений X_j, такие что $E_\theta Y_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого правила остановки ψ с $P_\theta(\tau_\psi < \infty) = 1$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_\theta s_n^\psi \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E_\theta Y_j P_\theta(\tau_\psi \geqslant j). \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть, для краткости, $E(\cdot)$ и $P(\cdot)$ обозначают, соответственно, $E_\theta(\cdot)$ и $P_\theta(\cdot)$ на протяжении всего доказательства.

Предположим, что левая часть (2.11) конечна. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} E s_n^\psi \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} E s_n^\psi Y_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} E s_n^\psi Y_j$$

(возможность изменения порядка суммирования обеспечивается конечностью исходного ряда). Нетрудно видеть, что при выполнении условий леммы

$$\sum_{n=j}^{\infty} E s_n^\psi Y_j = E t_j^\psi Y_j.$$

При этом в силу независимости t_j (см. определение t_n^ψ) и Y_j имеем

$$E t_j^\psi Y_j = E t_j^\psi E Y_j = E Y_j P(\tau_\psi \geqslant j),$$

так что

$$\sum_{n=1}^{\infty} E s_n^\psi \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E Y_j P(\tau_\psi \geqslant j). \tag{2.12}$$

Обращая эти рассуждения, в предположении конечности правой части (2.11), убеждаемся, что равенство в (2.11) также имеет место. □

Следствие 2.1 *Предположим, что $I_j(\theta_0, \theta) < \gamma < \infty$ для любого $j = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого правила остановки ψ с $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$*

$$I(\theta_0, \theta; \psi) = \sum_{j=1}^{\infty} I_j(\theta_0, \theta) P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant j). \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть

$$Y_j = \ln f_{\theta_0, j}/f_{\theta, j},$$

$$Y_j^+ = \max\{0, Y_j\},$$

$$Y_j^- = \max\{0, -Y_i\}.$$

Поскольку

$$E_{\theta_0} Y_j^- = E_{\theta_0} \max\left\{0, \ln \frac{f_{\theta,j}}{f_{\theta_0,j}}\right\} \leqslant E_{\theta_0} \max\left\{0, \frac{f_{\theta,j}}{f_{\theta_0,j}} - 1\right\}$$

$$\leqslant \int |f_{\theta,j} - f_{\theta_0,j}| d\mu \leqslant 2,$$

то из леммы 2.2 получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j^-\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E_{\theta_0}(Y_j^-) P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant j), \tag{2.14}$$

причем правая часть (2.14) конечна, поскольку $\sum_{j=1}^{\infty} P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant j) = E_{\theta_0}\tau_\psi$. Теперь из условия $I_j(\theta_0, \theta) < \gamma$, $j \geqslant 1$, следует, что $E_{\theta_0} Y_j^+ < \gamma + 2$, $j \geqslant 1$, так что из леммы 2.2 получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j^+\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E_{\theta_0}(Y_j^+) P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant j), \tag{2.15}$$

и правая часть (2.15) также конечна. Благодаря этому, вычитая левую и правую части (2.14) из соответствующих частей (2.15) и применяя затем вычитание почленно, получаем (2.13). □

Поскольку $\sum_{j=1}^{\infty} P(\tau_\psi \geqslant j) = E\tau_\psi$, то при выполнении условия регулярности C2' из леммы 2.2 следует, что

$$I(\theta_0, \theta; \psi) \leqslant \gamma_1 (\theta - \theta_0)^2 E\tau_\psi, \tag{2.16}$$

если $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$.

Следующая теорема, являющаяся следствием информационного неравенства (2.9), представляет самостоятельный интерес, поскольку дает границы для характеристик (среднего объема наблюдений, вероятности ошибки первого рода и производной функции мощности) *любого* критерия проверки гипотез.

Теорема 2.1 *Предположим, что выполнено условие регулярности C2'. Тогда для любого последовательного критерия* (ψ,ϕ), *такого, что* $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$ *и производная* $\dot\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)$ *функции мощности* $\beta_\theta(\psi,\phi)$ *в точке* $\theta=\theta_0$ *существует, выполняется неравенство*

$$(\dot\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))^2 \leqslant 2\gamma_1\beta_{\theta_0}(\psi,\phi)(1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))E_{\theta_0}\tau_\psi. \qquad (2.17)$$

Доказательство. Поскольку, на всем протяжении этого доказательства, последовательный критерий (ψ,ϕ) остается фиксированным, будем обозначать просто $\beta_h=\beta_{\theta_0+h}(\psi,\phi)$ для любого h и $\dot\beta_0=(\beta_\theta(\psi,\phi))'_\theta|_{\theta=\theta_0}$, предполагая при этом что для (ψ,ϕ) выполнены условия теоремы 2.1. Также будем писать просто $E(\cdot)$ и $P(\cdot)$ вместо $E_{\theta_0}(\cdot)$ и $P_{\theta_0}(\cdot)$ соответственно.

Выведем теперь из (2.16), что

$$(\dot\beta_0)^2 \leqslant 2\gamma_1\beta_0(1-\beta_0)E\tau_\psi,$$

то есть (2.17).

Пусть сначала $0<\beta_0<1$. Обозначим через

$$w(x)=\beta_0\ln\frac{\beta_0}{x}+(1-\beta_0)\ln\frac{1-\beta_0}{1-x}, \qquad (2.18)$$

где $x\in[0,1]$ (см. правую часть неравенства (2.8)). Из (2.8) и (2.16) следует, что

$$0\leqslant w(\beta_h)\leqslant \gamma_1 h^2 E\tau_\psi, \qquad (2.19)$$

поэтому, очевидно, во-первых, что $\beta_h\to\beta_0$, $h\to 0$.

Пусть $\Delta_h\beta=\beta_h-\beta_0$. Тогда по формуле Тейлора для $\ln(1+x)$

$$\begin{aligned} w(\beta_h) &= -\beta_0\ln(1+\Delta_h\beta/\beta_0)-(1-\beta_0)\ln(1-\Delta_h\beta/(1-\beta_0)) \\ &= (\Delta_h\beta)^2/(2\beta_0)+(\Delta_h\beta)^2/(2(1-\beta_0))+o((\Delta_h\beta)^2) \\ &= (\Delta_h\beta)^2/(2\beta_0(1-\beta_0))+o((\Delta_h\beta)^2), \quad h\to 0, \end{aligned}$$

откуда в силу (2.19) следует

$$(\Delta_h\beta/h)^2/(2\beta_0(1-\beta_0))+o((\Delta_h\beta/h)^2)\leqslant\gamma_1 E\tau_\psi, \quad h\to 0,$$

то есть

$$(\dot{\beta}_0)^2/(2\beta_0(1-\beta_0)) \leqslant \gamma_1 E\tau_\psi,$$

что эквивалентно (2.17).

Пусть теперь $\beta_0 = 0$. Из (2.9) и (2.16) следует, что $\Delta_h\beta/h \to 0$, когда $h \to 0$, то есть $\dot{\beta}_0 = 0$. Таким образом, (2.17) также выполнено.

Если $\beta_0 = 1$, то аналогичным образом из (2.10) получаем, что $\dot{\beta}_0 = 0$. □

Замечание 2.1 В случае н.о.р. наблюдений из регулярного семейства распределений из доказательства теоремы 2.1 легко видеть, что

$$(\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi,\phi))^2 \leqslant \beta_{\theta_0}(\psi,\phi)(1-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))I(\theta_0)E_{\theta_0}\tau_\psi, \tag{2.20}$$

где $I(\theta_0)$ – информационное количество Фишера. По-видимому, это неравенство справедливо и для широкого класса процессов с непрерывным временем (например, рассмотренного, в связи с локально наиболее мощными критериями, в [29] класса процессов с независимыми стационарными приращениями). Любопытно отметить, что в этом случае в неравенстве (2.20) достигается равенство для локально наиболее мощного критерия проверки гипотез о винеровском процессе с линейным сносом (см. [24]). В частности, из (2.20) следует оптимальность этого критерия в более широком классе критериев, чем в [29], а именно, в классе критериев с вероятностью ошибки *меньшей или равной* заданной $\alpha < 0.5$ и средним объемом наблюдений не превосходящей заданного.

Теорема 2.2 *Пусть выполнены условия регулярности C1', C2', C3'. Тогда функция мощности любого критерия* (ψ,ϕ)*, для которого* $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$*, дифференцируема в* $\theta = \theta_0$*, и*

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0}\left(s_n^\psi \phi_n \sum_{j=1}^{n} q_j\right), \tag{2.21}$$

где

$$q_n = q_n(x_n) = \frac{\dot{f}_{\theta_0,n}(x_n)}{f_{\theta_0,n}(x_n)}.$$

Доказательство. Пусть (ψ, ϕ) - любой критерий с $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$. Докажем, что

$$(\beta_\theta(\psi,\phi)-\beta_{\theta_0}(\psi,\phi))/(\theta-\theta_0)-\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0}\left(s_n^\psi \phi_n \sum_{j=1}^{n} q_j\right) \to 0, \quad \theta \to \theta_0, \tag{2.22}$$

то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^\psi \phi_n \left((f_\theta^n - f_{\theta_0}^n)/(\theta-\theta_0) - \dot{f}_{\theta_0}^n\right) d\mu^n \to 0, \quad \theta \to \theta_0, \tag{2.23}$$

где $\dot{f}_{\theta_0}^n = (\sum_{j=1}^n q_j) f_{\theta_0}^n$ (нетрудно видеть, что

$$E_{\theta_0} s_n^\psi \phi_n \sum_{j=1}^{n} q_j = \int s_n^\psi \phi_n \dot{f}_{\theta_0}^n d\mu^n,$$

поскольку из условия регулярности C1 следует, что $\dot{f}_{\theta_0,j} = 0$ μ-почти наверное на множестве $\{x: \ f_{\theta_0,j}(x) = 0\}$).

Из условия регулярности C1 нетрудно извлечь, что для любого фиксированного $k \geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{k} \int s_n^\psi \phi_n \left((f_\theta^n - f_{\theta_0}^n)/(\theta-\theta_0) - \dot{f}_{\theta_0}^n\right) d\mu^n \to 0, \quad \theta \to \theta_0 \tag{2.24}$$

(практически это дифференцируемость произведения $f_\theta^n = \prod_{j=1}^n f_{\theta,j}$ в $L_1(\mu^n)$ при условии дифференцируемости сомножителей $f_{\theta,j}$ в $L_1(\mu)$). Поэтому (2.23) будет следовать, если доказать, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $k > 1$, что

$$\limsup_{\theta\to\theta_0} \left| \sum_{n=k}^{\infty} \int s_n^\psi \phi_n \left((f_\theta^n - f_{\theta_0}^n)/(\theta-\theta_0) - \dot{f}_{\theta_0}^n\right) d\mu^n \right| < 2\epsilon. \tag{2.25}$$

Очевидно, (2.25) будет следовать, если показать, что можно найти такое k, что

$$\limsup_{\theta\to\theta_0} \left| \sum_{n=k}^{\infty} \int s_n^\psi \phi_n (f_\theta^n - f_{\theta_0}^n)/(\theta-\theta_0) d\mu^n \right| < \epsilon, \tag{2.26}$$

и

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int s_n^\psi |\dot{f}_{\theta_0}^n| d\mu^n = \sum_{n=k}^{\infty} E_{\theta_0}\left(s_n^\psi \left|\sum_{j=1}^{n} q_j\right|\right) < \epsilon. \tag{2.27}$$

Обратимся сначала к доказательству (2.27). Для этого заметим, что, согласно лемме 2.2,

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0}\left(s_n^{\psi}\sum_{j=1}^{n}|q_j|\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E_{\theta_0}|q_j|P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant j), \tag{2.28}$$

где ряд в правой части конечен, поскольку из условия регулярности C2' вытекает, что $E_{\theta_0}|q_j| \leqslant \gamma_2 < \infty$.

Следовательно, ряд в левой части (2.28) сходится, откуда следует (2.27).

Докажем теперь, что существует такое k, что выполняется (2.26). Для этого применим лемму 2.1 с $G(x) = -\ln(x)$, $a_n = \phi_n I_{\{n\geqslant k\}}$, $b_n = f_\theta^n/f_{\theta_0}^n$.

Пусть для краткости

$$\alpha_k = \sum_{n=k}^{\infty} E_{\theta_0}s_n^{\psi}\phi_n, \quad \alpha_k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} E_{\theta}s_n^{\psi}\phi_n,$$

и предположим сначала, что $0 < \alpha_k < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} I(\theta_0,\theta;\psi) &= \alpha_k \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0}s_n^{\psi}\phi_n I_{\{n\geqslant k\}}(-\ln(b_n))}{\alpha_k} \\ &+ (1-\alpha_k)\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0}s_n^{\psi}(1-\phi_n I_{\{n\geqslant k\}})(-\ln(b_n))}{1-\alpha_k}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Применяя к каждой из дробей в правой части (2.29) лемму 2.1 (как при выводе (2.8)), получаем

$$I(\theta_0,\theta;\psi) \geqslant -\alpha_k \ln\left(1+\frac{\alpha_k(\theta)-\alpha_k}{\alpha_k}\right) - (1-\alpha_k)\ln\left(1-\frac{\alpha_k(\theta)-\alpha_k}{1-\alpha_k}\right). \tag{2.30}$$

Поскольку, согласно (2.16), левая часть (2.30) стремится к нулю при $\theta \to \theta_0$, то, вполне аналогично доказательству теоремы 2.1, получаем сначала, что $\alpha_k(\theta) \to \alpha_k$, когда $\theta \to \theta_0$, а затем, применяя формулу Тейлора для $\ln(1+x)$ в точке $x = 0$ до членов второго порядка:

$$\frac{(\alpha_k(\theta)-\alpha_k)^2}{2\alpha_k(1-\alpha_k)} + o((\alpha_k(\theta)-\alpha_k)^2) \leqslant \gamma_1(\theta-\theta_0)^2.$$

Следовательно,

$$\limsup_{\theta\to\theta_0}\left|\frac{\alpha_k(\theta)-\alpha_k}{\theta-\theta_0}\right| \leqslant \sqrt{2\gamma_1\alpha_k} \leqslant \sqrt{2\gamma_1 P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant k)}.$$

Следовательно, выполнение (2.26) гарантируется, если $\sqrt{2\gamma_1 P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant k)} \leqslant \epsilon$, что можно обеспечить, поскольку, по условию, $E_{\theta_0}\tau_\psi < \infty$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha_k = \sum_{n\geqslant k} E_{\theta_0} s_n^\psi \phi_n = 0$. Согласно лемме 2.1

$$I(\theta_0, \theta; \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^\psi \left(-\ln \frac{f_\theta^n}{f_{\theta_0}^n} \right) \left(1 - \phi_n I_{\{n\geqslant k\}}\right)$$

$$\geqslant -\ln \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^\psi \frac{f_\theta^n}{f_{\theta_0}^n} (1 - \phi_n I_{\{n\geqslant k\}}) \right) \geqslant -\ln \left(1 - \sum_{n=k}^{\infty} E_\theta \phi_n I_{\{n\geqslant k\}} \right)$$

$$= -\ln(1 - \alpha_k(\theta)) \geqslant \alpha_k(\theta) = \alpha_k(\theta) - \alpha_k.$$

В силу (2.16) отсюда следует, что

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{\alpha_k(\theta) - \alpha_k}{|\theta - \theta_0|} = 0,$$

то есть в этом случае (2.26) также выполняется.

Аналогично доказывается, что если $\alpha_k = 1$, то

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{1 - \alpha_k(\theta)}{|\theta - \theta_0|} = 0,$$

то есть (2.26) также выполняетя. □

Замечание 2.2 Теорема 2.2 представляет собой обобщение, на случай разнораспределенных наблюдений и рандомизированных правил остановки и принятия решения, леммы 4.1.4 [18]. Для н.о.р. наблюдений этот результат был впервые анонсирован в [15] и восходит к неопубликованной работе [13]. Доказательство этого результата в [18] следует работе [21]. Сходные вопросы об условиях существования вторых производных от функции мощности последовательных критериев, по-видимому, до настоящего времени остаются без ответа (см. [22]).

2.3 Структура оптимальных последовательных критериев. Усеченные правила остановки

В этом параграфе мы даем характеризацию оптимальных усеченных последовательных критериев.

Для любого натурального N обозначим через $\mathscr{F}^N$ класс *усеченных* (до этапа N) правил остановки, то есть таких ψ, для которых $\psi_N \equiv 1$.

Начнем построение оптимальных усеченных правил с определения следующих функций.

Пусть $g(z) = \min\{0, z\}$, $z \in \mathrm{R}$. Определим для любых $N \geqslant 1$ и $n = 1, \ldots, N$ функции $v_n^N(z) = v_n^N(z, c)$, $z \in \mathrm{R}$, начиная с

$$v_N^N(z, c) \equiv g(z), \; z \in \mathrm{R}, \tag{2.31}$$

с помощью рекуррентных соотношений

$$v_{n-1}^N(z, c) = \min\left\{g(z), c + E_{\theta_0} v_n^N(z - q_n, c)\right\}, \tag{2.32}$$

для $n = N, N-1, \ldots, 1$, где, по определению

$$q_n = q_n(x_n) = \dot{f}_{\theta_0,n}(x_n)/f_{\theta_0,n}(x_n).$$

Пусть

$$r_{n-1}^N(z) = r_{n-1}^N(z, c) = E_{\theta_0} v_n^N(z - q_n, c), \tag{2.33}$$

для $n = 1, 2, \ldots, N$.

Для произвольных $b \in \mathrm{R}$ и $c > 0$ определим, следуя предыдущему параграфу, «функцию Лагранжа»

$$L_N(\psi; b, c) = \sum_{n=1}^{N} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \left(nc + \min\left\{0, b - \sum_{i=1}^{n} q_i\right\}\right) \tag{2.34}$$

для любого $\psi \in \mathscr{F}^N$.

Пусть также

$$z_n = z_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i)$$

(если $\prod_{i=1}^n f_{\theta_0,i}(x_i) = 0$, положим $z_n = 0$).

Теорема 2.3 *Предположим, что выполнено условие регулярности C1.*

Тогда для всех $\psi \in \mathscr{F}^N$ справедливо неравенство

$$L_N(\psi; b, c) \geqslant c + r_0^N(b, c), \tag{2.35}$$

причем равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда

$$I_{\{g(b-z_n)<c+r_n^N(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{g(b-z_n)\leqslant c+r_n^N(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \qquad (2.36)$$

μ^n*-почти наверное на* $T_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ *для каждого* $n = 1, 2, \ldots, N-1$.

Доказательство. Для доказательства достаточно выразить элементы оптимального правила остановки из следствия 1.2 главы 1 (V_n^N и R_n^N) через соответствующие функции v_n^N и r_n^N. Покажем, что для любых $N = 1, 2, \ldots$ и любых $n \leqslant N$

$$V_n^N = v_n^N(b - z_n) f_{\theta_0}^n \qquad (2.37)$$

μ^n-почти наверное.

Проведем доказательство по индукции по $n = N, N-1, \ldots, 1$. Все равенства между функциями от наблюдений $(x_1, \ldots, x_n)$ будут пониматься μ^n-почти наверное.

Для $n = N$, очевидно,

$$V_N^N = l_N = \min\{0, b - z_N\} f_{\theta_0}^n = v_N^N(b - z_N) f_{\theta_0}^n.$$

Предположим, что (2.37) выполняется для некоторого $n \leqslant N$. Тогда

$$V_{n-1}^N = \min\{l_{n-1}, c f_{\theta_0}^{n-1} + \int V_n^N d\mu(x_n)\}$$

$$= \min\left\{\min\{0, b f_{\theta_0}^{n-1} - \dot{f}_{\theta_0}^{n-1}\}, c f_{\theta_0}^{n-1} + \int v_n^N(b - z_n) f_{\theta_0}^n d\mu(x_n)\right\}$$

$$= \min\left\{g(b - z_{n-1}), c + \int v_n^N\,(b - z_{n-1} - q_n)\, f_{\theta_0,n}(x_n) d\mu(x_n)\right\} f_{\theta_0}^{n-1}$$

$$= v_{n-1}^N(b - z_{n-1}) f_{\theta_0}^{n-1}.$$

Таким образом, (2.37) доказано.

Теперь

$$R_{n-1}^N = \int V_n d\mu(x_n) = \int v_n^N\,(b - z_{n-1} - q_n)\, f_{\theta_0,n}(x_n) d\mu(x_n) f_{\theta_0}^{n-1}$$

$$= r_{n-1}^N(b - z_{n-1}) f_{\theta_0}^{n-1}$$

для любого $n = 1, 2, \ldots, N$.

Теперь очевидно, что (2.36) эквивалентно условию на ψ_n теоремы 1.3 первой главы, если $f_{\theta_0}^n > 0$. □

Следствие 2.2 *Предположим, что выполнено условие регулярности C1, и пусть $b > 0$ – любое вещественное число.*

Пусть $\psi \in \mathscr{F}^N$ – любое правило остановки, удовлетворяющее (2.36) μ^n-почти наверное на T_n^ψ для каждого $n = 1, 2, \ldots, N-1$, и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{z_n > b\}} \leqslant \phi_n \leqslant I_{\{z_n \geqslant b\}} \tag{2.38}$$

μ^n-почти наверное на S_n^ψ для любого $n = 1, 2, \ldots, N$.

Тогда критерий (ψ, ϕ) – локально наиболее мощный в классе всех (усеченных) критериев (ψ', ϕ') с $\psi' \in \mathscr{F}^N$, в том смысле, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi') \tag{2.39}$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \phi) \quad \text{и} \quad \mathscr{N}_{\theta_0}(\psi') \leqslant \mathscr{N}_{\theta_0}(\psi). \tag{2.40}$$

Неравенство (2.39) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (2.40). Если во всех неравенствах в (2.39) и (2.40) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (2.36) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots, N-1$ (с ψ'_n вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (2.38) (с ϕ'_n вместо ϕ_n) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'}$ для любого $n = 1, 2, \ldots, N$.

Дальнейшую детализацию оптимальных правил остановки можно получить, изучая свойства всех задействованных в (2.36) функций. Сформулируем необходимые свойства в виде следующих лемм.

Лемма 2.3 *Функции $v_n^N(z, c)$, $n = 0, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots$, определяемые соотношениями (2.32), обладают следующими свойствами:*

1) $v_n^N(z, c) \leqslant g(z)$, $z \in \mathrm{R}$,

2) $v_n^N(z, c)$ как функция $z \in \mathrm{R}$ вогнута и непрерывна,

3) $v_n^N(z, c)$ как функция $z \in \mathrm{R}$ не убывает,

4) $z - v_n^N(z, c)$ как функция $z \in \mathrm{R}$ не убывает,

5) $g(z) - v_n^N(z, c) \to 0$ при $z \to \pm\infty$.

Доказательство. В доказательстве будем использовать следующую элементарную лемму.

Лемма 2.4 *Пусть F – вогнутая функция на* R. *Тогда для любого $n \geqslant 1$*

$$G_n(z) = E_{\theta_0} F\left(z - q_n\right)$$

– также вогнутая функция от z. При этом $G_n(z) \leqslant F(z)$, $z \in \mathrm{R}$.

Свойство 1) является прямым следствием определений (2.31) и (2.32).

Свойства 2) – 5) докажем одновременно, пользуясь индукцией по $n = N, N-1, \ldots, 1$.

Для $v_N^N(z,c) \equiv g(z)$ все упомянутые в 2) – 5) свойства очевидны.

Предположим, что свойства 2) – 5) имеют место для некоторого $n \leqslant N$. Докажем, что тогда они выполняются для v_{n-1}^N.

Вследствие (2.32), $v_{n-1}^N(z,c)$ – минимум двух вогнутых функций (вторая из них вогнута по лемме 2.4). Таким образом, $v_{n-1}^N(z,c)$ также вогнута.

Теперь непрерывность $v_{n-1}^N(z,c)$ следует из теоремы 10.1 [11].

Если $v_n^N(z,c)$ не убывает, то по (2.32) $v_{n-1}^N(z,c)$ также не убывает. Поскольку $z - v_n^N(z,c)$ – неубывающая функция, то

$$z - v_{n-1}^N(z,c) = \max\left\{\max\{0,z\}, -c + E_{\theta_0}\left((z-q_n) - v_n^N(z-q_n,c)\right)\right\}$$

– неубывающая, поскольку математическое ожидание в правой части – неубывающая функция z.

Наконец, докажем что $g(z) - v_{n-1}^N(z,c) \to 0$, когда $z \to \pm\infty$ (свойство 5) леммы).

Пусть сначала z_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – монотонно возрастающая последовательность, $z_k \to \infty$, $k \to \infty$.

При достаточно больших k $z_k > 0$, поэтому при таких k $g(z_k) = 0$, так что

$$g(z_k) - v_{n-1}^N(z_k,c) = -\min\left\{0, c + E_{\theta_0} v_n^N(z_k - q_n, c)\right\} \to 0,$$

когда $k \to \infty$, поскольку математическое ожидание сходится к нулю по теореме Лебега об ограниченной сходимости. Действительно, по предположению индукции $v_n^N(z_k - q_n, c) \to 0$, когда $k \to \infty$, и

$$v_n^N(z_1 - q_n, c) \leqslant v_n^N(z_k - q_n, c) \leqslant 0,$$

где функция $v_n^N(z_1 - q_n, c)$ интегрируема, так как согласно свойствам 3) и 4) имеем:

$$0 \leqslant g(z) - v_n^N(z, c) \leqslant -v_n^N(0, c) < \infty,$$

так что

$$v_n^N(z_1 - q_n, c) \geqslant g(z_1 - q_n) + v_n^N(0, c),$$

и при этом

$$E_{\theta_0}|g(z_1 - q_n)| \leqslant E_{\theta_0}|z_1 - q_n| < \infty.$$

Пусть теперь z_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – монотонно убывающая последовательность, $z_k \to -\infty$, $k \to \infty$. При достаточно больших k $z_k < 0$, поэтому $g(z_k) = z_k$, и

$$g(z_k) - v_{n-1}^N(z_k, c) = -\min\left\{0, c - E_{\theta_0}\left((z_k - q_n) - v_n^N(z_k - q_n, c)\right)\right\} \to 0$$

когда $z \to \infty$, поскольку математическое ожидание сходится к нулю по теореме Лебега об ограниченной сходимости. Действительно,

$$(z_k - q_n) - v_n^N(z_k - q_n, c) \to 0,$$

когда $k \to \infty$, согласно свойству 5), и при этом

$$(z_k - q_n) - v_n^N(z_k - q_n, c) \leqslant (z_1 - q_n) - v_n^N(z_1 - q_n, c)$$

согласно свойству 4), где функция в правой части неравенства интегрируема, по тем же причинам, что и выше. □

Лемма 2.5 *Функции $r_n^N(z, c)$, $n = 0, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots,$ определяемые соотношениями (2.33), обладают следующими свойствами:*

1) $r_n^N(z, c) \leqslant v_n^N(z, c)$, $z \in \mathrm{R}$,

2) $r_n^N(z, c)$ *как функция* $z \in \mathrm{R}$ *вогнута и непрерывна,*

3) $r_n^N(z, c)$ *как функция* $z \in \mathrm{R}$ *не убывает,*

4) $z - r_n^N(z, c)$ *как функция* $z \in \mathrm{R}$ *не убывает,*

5) $g(z) - r_n^N(z, c) \to 0$ *при* $z \to \pm\infty$.

Доказательство. 1) Имеем по определению:

$$r_n^N(z,c) - v_n^N(z,c) = -\min\{g(z) - r_n^N(z,c), c\}$$
$$\leqslant -\min\left\{E_{\theta_0}\left(g(z-q_n) - v_n^N(z-q_n,c)\right), c\right\} \leqslant 0,$$

где первое неравенство следует из неравенства Йенсена, а второе – из свойства 1) леммы 2.3.

2) Согласно свойству 2) леммы 2.3, $v_{n+1}^N(z-q_{n+1},c)$ – вогнутая функция z. Согласно лемме 2.4, отсюда следует вогнутость r_n^N. Непрерывность r_n^N следует теперь из теоремы 10.1 [11].

3) Согласно свойству 3) леммы 2.3, $v_{n+1}^N(z-q_{n+1},c)$ – неубывающая функция z, отсюда следует, что $r_n^N(z,c) = E_{\theta_0}v_{n+1}^N(z-q_{n+1},c)$ – также неубывающая функция z.

4) Точно так же $z - r_n^N(z,c) = E_{\theta_0}((z-q_{n+1}) - v_{n+1}^N(z-q_{n+1},c))$ является неубывающей функцией z.

5) См. доказательство свойства 5) леммы 2.3. □

Лемма 2.6 *Если $c + r_n^N(0,c) \leqslant 0$, то в каждой из областей $\{z \leqslant 0\}$ и $\{z \geqslant 0\}$ существует единственное решение уравнения*

$$c + r_n^N(z,c) = g(z), \tag{2.41}$$

которые мы обозначим $A_n^N = A_n^N(c) \leqslant 0$ и $B_n^N = B_n^N(c) \geqslant 0$. При этом $g(z) > c + r_n^N(z,c)$ тогда и только тогда, когда $A_n^N < z < B_n^N$.

Если $c + r_n^N(0,c) > 0$, то уравнение (2.41) решения не имеет.

Доказательство. Функция $g(z) - r_n^N(z,c)$ непрерывна, и неотрицательна в силу свойства 1) леммы 2.5 и свойства 1) леммы 2.3.

В силу свойств 3) и 4) леммы 2.5 $g(z) - r_n^N(z,c)$ – неубывающая функция при $z \leqslant 0$ и невозрастающая функция при $z \geqslant 0$. Поэтому ее максимальное значение достигается при $z = 0$ и равно $-r_n^N(0,c)$, так что при $c + r_n^N(0,c) > 0$ уравнение (2.41) решений иметь не может.

Докажем, что в противном случае имеется в точности одно решение уравнения (2.41) при $z \leqslant 0$ и при $z \geqslant 0$. Например, докажем этот факт для $z \leqslant 0$ – другой случай рассматривается вполне аналогично.

При $z \leqslant 0$ функция $g(z) - r_n^N(z,c) = z - r_n^N(z,c)$ выпуклая, непрерывная, неубывающая, и при этом $g(z) - r_n^N(z,c) \to 0$, когда $z \to -\infty$ (лемма 2.5). Легко видеть, что любая функция на $(-\infty, 0]$, обладающая этими свойствами, принимает любое положительное значение, не превосходящее ее максимального значения, и притом только один раз. Поскольку по предположению

$$0 < c \leqslant -r_n^N(0,c) = \max_{z \leqslant 0}\{g(z) - r_n^N(z,c)\},$$

отсюда следует, что при $z \leqslant 0$ существует единственное решение уравнения $g(z) - r_n^N(z,c) = c$, A_n^N. При этом очевидно, что при $z > A_n^N$ выполняется неравенство $g(z) - r_n^N(z,c) > c$, то есть $g(z) > c + r_n^N(z,c)$, и притом это неравенство выполняется только когда $z > A_n^N$, так как в противном случае $g(z) - r_n^N(z,c) \leqslant c$, в силу монотонности. $\square$

Если $c + r_n^N(0,c) \leqslant 0$, обозначим через Δ_n^N интервал $(A_n^N,\ B_n^n)$ и через $\bar{\Delta}_n^N$ – замкнутый интервал $[A_n^N,\ B_n^n]$. Если же $c + r_n^N(0,c) > 0$, то пусть по определению $\bar{\Delta}_n^N = \Delta_n^N = \emptyset$. Заметим, что $\Delta_n^N = \Delta_n^N(c)$ и $\bar{\Delta}_n^N = \bar{\Delta}_n^N(c)$.

Следствие 2.3 *При выполнении условий следствия 2.2 его утверждение остается справедливым при замене всех ссылок на формулу (2.36) ссылками на формулу*

$$I_{\{b - z_n \in \Delta_n^N(c)\}} \leqslant 1 - \psi_n \leqslant I_{\{b - z_n \in \bar{\Delta}_n^N(c)\}}. \tag{2.42}$$

Доказательство. Из леммы 2.6 следует, что $g(b - z_n) > c + r_n^N(b - z_n, c)$ тогда и только тогда, когда $b - z_n \in \Delta_n^N(c)$, а $g(b - z_n) \geqslant c + r_n^N(b - z_n, c)$ тогда и только тогда, когда $b - z_n \in \bar{\Delta}_n^N(c)$. Поэтому (2.42) эквивалентно (2.36). $\square$

2.4 Структура оптимальных последовательных критериев. Общий случай

В этом параграфе мы даем характеризацию структуры оптимальных последовательных критериев, когда отсутствуют ограничения на максимальную длительность наблюдений.

Идея всего последующего - устремить максимальное допустимое число наблюдений N, которое мы предполагали фиксированным в предыдущем параграфе, к бесконечности. При этом мы доказываем сходимость всех элементов, определяющих структуру оптимальных правил в усеченной задаче к соответствующим элементам в неусеченной задаче.

Начнем со следующей леммы.

Лемма 2.7 *Для любого $N \geqslant 1$, для любого $N \geqslant n$*
1) $v_n^N(z,c) \geqslant v_n^{N+1}(z,c)$,
2) $r_n^N(z,c) \geqslant r_n^{N+1}(z,c)$
для всех $z \in \mathrm{R}$ и $c > 0$.

Доказательство. Докажем утверждение 1) по индукции по $n = N, N-1, \ldots, 1$. Пусть $n = N$. Тогда

$$v_N^{N+1}(z,c) = \min\left\{g(z), c + E_{\theta_0} v_{N+1}^{N+1}(z - q_n, c)\right\} \leqslant g(z) = v_{N+1}^{N+1}(z,c).$$

Предположим, что неравенство $v_n^N \geqslant v_n^{N+1}$ выполняется для некоторого n, $N \geqslant n > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} v_{n-1}^N(z,c) &= \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v_n^N(z - q_n, c)\} \geqslant \\ &\geqslant \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v_n^{N+1}(z - q_n, c)\} = v_{n-1}^{N+1}(z,c). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство выполняется для $n-1$, что завершает индукцию.

Утверждение 2) является прямым следствием утверждения 1) в силу (2.33). $\square$

Так как, по лемме 2.7, $v_n^N(z,c)$ и $r_n^N(z,c)$ – невозрастающие последовательности по N при каждом $z \in \mathrm{R}$, то существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$v_n(z) = v_n(z,c) = \lim_{N\to\infty} v_n^N(z,c), \tag{2.43}$$

$$r_n(z) = r_n(z,c) = \lim_{N\to\infty} r_n^N(z,c). \tag{2.44}$$

При этом, переходя к пределу при $N \to \infty$ в (2.32) и (2.33), для $n = 1, 2, \ldots$ получаем:

$$v_{n-1}(z, c) = \min \left\{ g(z), c + E_{\theta_0} v_n \left(z - q_n, c \right) \right\}, \qquad (2.45)$$

$$r_{n-1}(z, c) = E_{\theta_0} v_n \left(z - q_n, c \right). \qquad (2.46)$$

Определим $\mathscr{F}$ как класс правил остановки с конечным средним временем наблюдения при нулевой гипотезе:

$$\mathscr{F} = \{\psi :\ E_{\theta_0} \tau_\psi < \infty\}.$$

Покажем что, при выполнении условия регулярности C2', для любого $\psi \in \mathscr{F}$ имеет место сходимость $L_N(\psi; b, c) \to L(\psi; b, c)$, $N \to \infty$.

Лемма 2.8 *Пусть выполнены условия регулярности C1' – C3' и пусть $\psi \in \mathscr{F}$. Тогда*

$$L_N(\psi; b, c) \to L(\psi; b, c),$$

при $N \to \infty$ для любых $c > 0$ и $b \in \mathrm{R}$.

Доказательство. Проводится вполне аналогично доказательству леммы 1.6 главы 1, с той разницей, что для доказательства сходимости

$$\int t_N^\psi l_N d\mu^N \to 0, \quad N \to \infty, \qquad (2.47)$$

вместо условия регулярности C3 можно использовать, в случае независимых наблюдений, более слабое условие регулярности C3'. Действительно, в обозначениях настоящей главы

$$\begin{aligned} \int t_N^\psi |l_N| d\mu^N &= E_{\theta_0} t_N^\psi \left| \min \left\{ 0, b - \sum_{j=1}^N q_j \right\} \right| \leqslant E_{\theta_0} t_N^\psi \left| b - \sum_{j=1}^N q_j \right| \\ &\leqslant |b| P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant N) + E_{\theta_0} t_N^\psi \sum_{j=1}^N |q_j| \qquad (2.48) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (2.48) стремится к нулю при $N \to \infty$ в силу условия $E_{\theta_0} \tau_\psi < \infty$. Для доказательства того, что второе слагаемое в правой части (2.48) также стремится к нулю, заметим, что, в силу условия регулярности C2', из (2.28) вытекает, что ряд в левой части (2.28) конечен, поэтому

$$\sum_{n=N}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \sum_{j=1}^{N} |q_j| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \sum_{j=1}^{n} |q_j| \to 0 \tag{2.49}$$

при $N \to \infty$. Поскольку $E_{\theta_0} \sum_{j=1}^{N} |q_j| < \infty$, отсюда легко получаем, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \sum_{j=1}^{N} |q_j| = E_{\theta_0} t_N^{\psi} \sum_{j=1}^{N} |q_j| \to 0$$

при $N \to \infty$, что и требовалось. □

В силу леммы 2.8 мы можем перейти к пределу в обеих частях неравенства (2.35), так что

$$L(\psi; b, c) \geqslant c + r_0(b, c)$$

для любого $\psi \in \mathscr{F}$, если выполнены условия регулярности C1' – C3'. При этом, согласно лемме 1.5 главы 1,

$$\inf_{\psi \in \mathscr{F}} L(\psi; b, c) = c + r_0(b, c).$$

Докажем, что при выполнении условий регулярности C1' – C3' задача минимизации $L(\psi; b, c)$ конечна (конечность вводится в параграфе 1.4 главы 1), более точно, что справедлива следующая

Лемма 2.9 *Если выполнены условия регулярности C1' – C3', то для любых $b > 0$, $c > 0$ и для любого $\psi \in \mathscr{F}$ выполняется неравенство*

$$L(\psi; b, c) \geqslant -\frac{\gamma_1}{8c} \tag{2.50}$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \leqslant \sqrt{\frac{\gamma_1}{2} E_{\theta_0} \tau_{\psi}},$$

поэтому

$$L(\psi, \phi; b, c) \geqslant c E_{\theta_0} \tau_{\psi} - \sqrt{\frac{\gamma_1}{2} E_{\theta_0} \tau_{\psi}} \geqslant -\frac{\gamma_1}{8c},$$

откуда следует (2.50), поскольку, согласно следствию 1.1 главы 1,

$$L(\psi; b, c) = \inf_{\phi} L(\psi, \phi; b, c).$$

□

Замечание 2.3 *Из леммы 2.9 следует, что*

$$\inf_{\psi\in\mathscr{F}} L(\psi;b,c) = c + r_0(b,c) \geqslant -\frac{\gamma_1}{8c} > -\infty$$

для любых $b > 0$ *и* $c > 0$.

Из этого факта легко следует, что также

$$c + r_n(b,c) > -\frac{\gamma_1}{8c}$$

для любых $b > 0$, $c > 0$ *и любого* $n \geqslant 0$. *Действительно, по построению,* r_n *есть «функция* r_0*» для задачи проверки гипотез* $H_0 : \theta = \theta_0$ *при альтернативе* $H_1 : \theta > \theta_0$ *о параметре распределения процесса* $X_1, X_2, \ldots,$ *для которого* $X_1 \sim f_{\theta,n+1}$, $X_2 \sim f_{\theta,n+2}, \ldots$.

Теперь теорема 1.4 главы 1 принимает следующий вид.

Теорема 2.4 *Предположим, что выполнены условия регулярности C1' – C3'.*

Если существует $\psi \in \mathscr{F}$ *такое, что*

$$L(\psi;b,c) = \inf_{\psi'\in\mathscr{F}} L(\psi';b,c), \tag{2.51}$$

то

$$I_{\{g(b-z_n)<c+r_n(b-z_n,c)\}} \leqslant \psi_n \leqslant I_{\{g(b-z_n)\leqslant c+r_n(b-z_n,c)\}} \tag{2.52}$$

μ^n*-почти наверное на* $T_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ *для каждого* $n = 1, 2, \ldots$.

Наоборот, если правило остановки ψ *удовлетворяет (2.52)* μ^n*-почти наверное на* $T_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ *для каждого* $n = 1, 2, \ldots,$ *и при этом* $\psi \in \mathscr{F}$, *то оно удовлетворяет (2.51).*

Для доказательства теоремы 2.4 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.10 *Функции* $r_n(z,c)$, $n = 0, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots,$ *определяемые соотношениями (2.44), обладают следующими свойствами:*

1) $r_n(z,c) \leqslant v_n(z,c) \leqslant g(z)$, $z \in \mathrm{R}$,

2) $r_n(z,c)$ *как функция* $z \in \mathrm{R}$ *вогнута и непрерывна,*

3) $r_n(z,c)$ *как функция* $z \in \mathrm{R}$ *не убывает,*

4) $z - r_n(z,c)$ *как функция* $z \in \mathrm{R}$ *не убывает,*

5) $g(z) - r_n(z,c) \to 0$ *при* $z \to \pm\infty$.

Доказательство. Свойства 1) – 4) следуют из соответствующих свойств леммы 2.5 с помощью предельного перехода по $N \to \infty$ (непрерывность в свойстве 2) следует из вогнутости).

Для доказательства свойства 5) достаточно показать, что $z - r_n(z) \to 0$ при $z \to -\infty$ и $r_n(z) \to 0$ при $z \to +\infty$.

Для доказательства того, что $r_n(z) \to 0$, $z \to +\infty$, достаточно показать в силу (2.46), что $v_n(z) \to 0$, $z \to +\infty$.

По свойству 3 предел $\lim_{z\to+\infty} v_n(z,c) = \lambda_n(c)$ (в дальнейшем, для краткости, просто λ_n) существует для всех $n = 1, 2, \dots$. Из (2.46) следует, что $\lim_{z\to\infty} r_{n-1}(z,c) = \lambda_n(c)$, $n = 1, 2, \dots$. Переходя к пределу при $z \to \infty$ в (2.45) получаем, что

$$\lambda_n = \min\{0, c + \lambda_{n+1}\} \tag{2.53}$$

для любого $n = 1, 2, \dots$. Из (2.53) очевидно, что если для какого-то $n \geqslant 1$ $\lambda_n < 0$, то $\lambda_n = c + \lambda_{n+1} < 0$, следовательно, $\lambda_{n+1} = c + \lambda_{n+2} < 0$, и так далее для всех остальных n. Это мгновенно приводит к противоречию, поскольку тогда

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1} &= \lambda_n - c, \\
\lambda_{n+2} &= \lambda_{n+1} - c = \lambda_n - 2c, \\
&\dots, \\
\lambda_{n+k} &= \lambda_n - kc, \\
&\dots,
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$r_{n+k-1}(0,c) \leqslant \lambda_n - kc$$

для любого $k \geqslant 1$, что противоречит тому, что

$$r_{n+k-1}(0,c) \geqslant -\frac{\gamma_1}{8c} - c$$

для любого $k \geqslant 1$ (см. замечание 2.3).

Следовательно,

$$\lambda_n(c) = \lim_{z\to\infty} r_{n-1}(z,c) = 0$$

для любого $n \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь случай $z \to -\infty$. Легко видеть, что

$$v_{n-1}^N(z,c) - z = \min\{\min\{0,-z\}, c + E_{\theta_0}(v_n^N(z-q_n,c) - (z-q_n))\}$$

откуда, переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$v_{n-1}(z,c) - z = \min\{\min\{0,-z\}, c + E_{\theta_0}(v_n(z-q_n,c) - (z-q_n))\} \quad (2.54)$$

где, согласно свойству 4) леммы 2.10, функции $v_n(z,c)-z$ – невозрастающие функции z для всех $n = 1, 2, \ldots$. Раз так, существуют пределы

$$\lim_{z\to-\infty} v_n(z,c) - z = \lambda_n(c) \leqslant 0$$

(пусть, для краткости, $\lambda_n = \lambda_n(c)$). Точно так же, как и выше, переходя к пределу при $z \to -\infty$ в (2.54), получаем

$$\lambda_n = \min\{0, c + \lambda_{n+1}\},$$

$n = 1, 2, \ldots$. Точно так же, как и выше, предполагая, что какое-то $\lambda_n < 0$, получаем, что

$$\lambda_{n+k} = \lambda_n - kc \to -\infty,$$

когда $k \to \infty$. Следовательно, для любого $z \leqslant 0$,

$$r_{n+k-1}(z,c) - z \leqslant \lambda_n - kc$$

(согласно свойству 4) леммы 2.10). В частности, полагая $z = 0$, получаем

$$r_{n+k-1}(0,c) \leqslant \lambda_n - kc$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$, то есть снова противоречие с тем, что все $r_n(0,c)$ ограничены снизу одной константой для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Следовательно,

$$\lambda_n = \lim_{z\to-\infty}(r_{n-1}(z,c) - z) = 0$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$. $\square$

Доказательство теоремы 2.4. Необходимость непосредственно следует из теоремы 1.4 главы 1. Для доказательства достаточности требуется показать только, что

$$\int t_n^{\psi}(l_n - V_n)d\mu^n \to 0 \tag{2.55}$$

когда $n \to \infty$.

Из (2.37) следует, что $V_n = v_n(b - z_n)f_{\theta_0}^n$. Кроме того, мы знаем, что $l_n = g(b - z_n)f_{\theta_0}^n$. Поэтому интеграл в (2.55) совпадает с

$$\int t_n^{\psi}(l_n - V_n)d\mu^n = E_{\theta_0}t_n^{\psi}(g(b - z_n) - v_n(b - z_n))$$

$$\leqslant E_{\theta_0}t_n^{\psi}(g(b - z_n) - r_n(b - z_n)) \tag{2.56}$$

(последнее неравенство выполняется в силу свойства 1) леммы 2.10). В силу свойств 3) и 4) той же леммы имеем для любого z

$$0 \leqslant g(z) - r_n(z) \leqslant -r_n(0) \leqslant \frac{\gamma_1}{8c} + c$$

(для последней оценки мы воспользовались леммой 2.9 (см. замечание 2.3)). Поэтому из (2.56) следует, что

$$0 \leqslant \int t_n^{\psi}(l_n - V_n)d\mu^n \leqslant \left(\frac{\gamma_1}{8c} + c\right) P_{\theta_0}(\tau_{\psi} \geqslant n) \to 0$$

при $n \to \infty$, поскольку, по условию теоремы, $\psi \in \mathscr{F}$, а значит, $E_{\theta_0}\tau^{\psi} < \infty$. □

2.5 Основной результат

Следующая теорема следует из теоремы 2.4 с помощью теорем 1.1 и 1.2 из предыдущего параграфа и дает решение исходной условной задачи (см. введение) в классе всех последовательных критериев с правилами остановки из $\mathscr{F}$.

Теорема 2.5 *Предположим, что выполнены условия регулярности C1' – C3'. Пусть $c > 0$ и $b > 0$ – любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ такое, что*

$$I_{\{g(b-z_n)<c+r_n(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{g(b-z_n)\leqslant c+r_n(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \tag{2.57}$$

μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{z_n > b\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{z_n \geqslant b\}}(x^{(n)}) \tag{2.58}$$

μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\psi \in \mathscr{F}$.

Тогда последовательный критерий (ψ, ϕ) – локально наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с $\psi' \in \mathscr{F}$ в том смысле, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'), \tag{2.59}$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \phi) \quad \text{и} \quad \mathscr{N}_{\theta_0}(\psi') \leqslant \mathscr{N}_{\theta_0}(\psi). \tag{2.60}$$

Неравенство (2.59) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (2.60).

Если во всех неравенствах в (2.59) и (2.60) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (2.57) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (с ψ_n' вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (2.58) (с ϕ_n' вместо ϕ_n) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Точно так же, как в предыдущем параграфе, мы можем представить неравенства $g(b - z_n) < c + r_n(b - z_n, c)$, определяющие форму оптимального критерия, в более простом виде. Действительно, с помощью леммы 2.10 нетрудно вывести, что если

$$c + r_n(z, c) \leqslant 0,$$

то в каждой из областей $\{z \leqslant 0\}$ и $\{z \geqslant 0\}$ существует единственное решение уравнения

$$c + r_n(z, c) = g(z), \tag{2.61}$$

$A_n = A_n(c) \leqslant 0$ и $B_n = B_n(c) \geqslant 0$ (см. доказательство леммы 2.6). Обозначим в этом случае $\Delta_n = \Delta_n(c) = (A_n(c), B_n(c))$ и $\bar{\Delta}_n = \bar{\Delta}_n(c) =$

$[A_n(c), B_n(c)]$. Если $c + r_n(z,c) > 0$, положим $\Delta_n(c) = \bar{\Delta}_n(c) = \emptyset$. Тогда легко видеть, что (2.57) эквивалентно

$$I_{\{b-z_n \in \Delta_n(c)\}} \leqslant 1 - \psi_n \leqslant I_{\{b-z_n \in \bar{\Delta}_n(c)\}}. \tag{2.62}$$

Поэтому из теоремы 2.5 вытекает

Следствие 2.4 *При выполнении условий регулярности C1' – C3' утверждение теоремы 2.5 остается справедливым при замене всех ссылок на формулу (2.57) ссылками на формулу (2.62).*

Замечание 2.4 Если в (2.57) (или (2.62)) и, соответственно, в (2.58) $b < 0$, то при выполнении условий теоремы 2.5 (с «$b < 0$» вместо «$b > 0$») из теоремы 5.3 предыдущего параграфа следует, что критерий $(\psi, \bar{\phi})$, где $\bar{\phi}_n = 1 - \phi_n$, $n = 1, 2, \dots$, является локально наиболее мощным для проверки гипотезы $H_0 : \ \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \ \theta < \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') таких, что

$$E_{\theta_0}\tau'_{\psi} \leqslant E_{\theta_0}\tau_{\psi} \quad \text{и} \quad \alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \bar{\phi}).$$

Если $b = 0$ в (2.57) (или (2.62)) и в (2.58), то, при выполнении всех остальных условий теоремы 2.5, критерий (ψ, ϕ) является локально наиболее мощным для проверки гипотезы $H_0 : \ \theta = \theta_0$ против $H_1 : \ \theta > \theta_0$, а критерий $(\psi, \bar{\phi})$ является локально наиболее мощным для проверки гипотезы H_0 против $H_1 : \ \theta < \theta_0$, в классе всех критериев, для которых

$$E_{\theta_0}\tau'_{\psi} \leqslant E_{\theta_0}\tau_{\psi}$$

(независимо от уровня их вероятности ошибки первого рода).

2.6 Примеры: случаи «периодических» и «конечно-нестационарных» наблюдений

В этом параграфе рассматриваются задачи построения локально наиболее мощных критериев в двух частных случаях рассмотренной общей модели:

в случае «периодических» наблюдений (см. [19]), и в случае «конечно-нестационарных» наблюдений (см. [25]). Случай н.о.р. наблюдений является частным случаем обоих из этих моделей.

Рассмотрим сначала «периодический» случай, когда существует такое натуральное T, что $f_{\theta,n+T} = f_{\theta,n}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. В этом случае, очевидно, при выполнении условий регулярности C1' и C2' условие регулярности C3' выполняется автоматически (поскольку условие регулярности C1' гарантирует, что все $E_{\theta_0}|\dot{f}_{\theta_0,j}/f_{\theta_0,j}|$, $j = 1, 2, \ldots, T$, конечны). Нетрудно видеть, что $v_n = v_{n+T}$ и $r_n = r_{n+T}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, поэтому решения уравнения (2.61) также периодичны: $A_n(c) = A_{n+T}(c)$, $B_n(c) = B_{n+T}(c)$, $n = 1, 2, \ldots$. Кроме, того,

$$v_{n-1}(z, c) = \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v_n(z - q_n, c)\}$$

для любого $n = T, T-1, \ldots, 2$, и

$$v_T(z, c) = \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v_1(z - q_1, c)\}$$

Легко видеть, что в этом случае достаточное условие оптимальности в теореме 2.5 ($\psi \in \mathscr{F}$) также выполняется, если, дополнительно к условиям регулярности C1' – C2', предположить, что

$$P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{T} q_j = 0\right) < 1. \tag{2.63}$$

Действительно, пусть $n = kT$ и $\xi_i = \sum_{j=1}^{T} q_{(i-1)T+j}$, $i = 1, 2, \ldots$. В этом случае для любого ψ, удовлетворяющего (2.62), имеет место оценка

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}(\tau_\psi > n) &\leqslant E_{\theta_0} \prod_{j=1}^{n} I_{\{\sum_{i=1}^{j} q_i \in b - \bar{\Delta}_j(c)\}} \\ &= P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{j} q_i \in b - \bar{\Delta}_j(c),\ j = 1, 2, \ldots, n\right) \\ &\leqslant P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{j} \xi_i \in b - \bar{\Delta}_T(c),\ j = 1, 2, \ldots, k\right). \end{aligned} \tag{2.64}$$

При этом все ξ_i, $i = 1, 2, \dots$ - н.о.р. случайные величины такие, что $P_{\theta_0}(\xi_i = 0) < 1$, так что применима теорема Ч. Стейна [36], в силу которой, в частности, правая часть (2.64) имеет экспоненциальную скорость убывания, когда $k \to \infty$. Следовательно,

$$E_{\theta_0}\tau_\psi = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta_0}(\tau_\psi \geqslant n) < \infty,$$

то есть $\psi \in \mathscr{F}$.

Если же условие (2.63) не выполняется, то есть $P_{\theta_0}(\sum_{j=1}^{T} q_j = 0) = 1$, то, в силу независимости q_j, $j = 1, 2, \dots$ имеем, что $P_{\theta_0}(q_j = 0) = 1$, для любого j. По построению, имеем $v_n^N(z, c) \equiv g(z)$, $r_n^N(z, c) \equiv g(z)$ для любого $N \geqslant 1$ и для любого $n \leqslant N$, поэтому $v_n(z) \equiv g(z)$, $r_n(z) \equiv g(z)$ для любого $n = 1, 2, \dots$, так что $P_{\theta_0}(\psi_1 = 1) = 1$ для любого ψ, удовлетворяющего (2.62). Таким образом, если условие (2.63) не выполняется, то $P_{\theta_0}(\tau_\psi = 1) = 1$, так что тривиальным образом получаем $\psi \in \mathscr{F}$.

Итак, в периодическом случае при выполнении условий регулярности C1' – C2' любой критерий (ψ, ϕ) удовлетворяющий (2.62) и (2.58) является локально наиболее мощным в смысле теоремы 2.5.

Рассмотрим теперь случай «конечно-нестационарных» наблюдений. Предположим, что существует такое натуральное k, что $f_{\theta,j} = f_{\theta,j+1}$, для любого $j \geqslant k$ ($k = 1$ соответствует случаю н.о.р. наблюдений). Тогда легко видеть, что $v_n(z, c) = v(z, c)$, $r_n(z, c) = r(z, c)$ (не зависят от n) для всех $n \geqslant k - 1$, и при этом

$$v(z, c) = \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v(z - q_k, c)\}, \quad r(z, c) = E_{\theta_0} v(z - q_k, c), \qquad (2.65)$$

поэтому уравнение (2.61) для определения $A_n(c)$, $B_n(c)$ принимает вид

$$c + r(z, c) = g(z), \qquad (2.66)$$

если $n \geqslant k-1$, следовательно, $A_n(c) = A(c)$, $B_n(c) = B(c)$ (не зависят от n), если $n \geqslant k - 1$. Для остальных n (если они есть) применимы рекуррентные соотношения

$$v_{n-1}(z, c) = \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v_n(z - q_n, c)\}, \quad r_{n-1} = E_{\theta_0} v_n(z - q_n, c),$$

$n = k-1, \dots, 1$.

Разумеется, при выполнении условий регулярности С1' – С3', и, дополнительно, условия

$$P_{\theta_0}(q_k = 0) < 1, \tag{2.67}$$

тот же самый аргумент Ч. Стейна обеспечивает конечность $E_{\theta_0}\tau_\psi$ для любого ψ, удовлетворяющего (2.62). Если же условие (2.67) не выполняется (то есть $P_{\theta_0}(q_k = 0) = 1$), то из (2.65) следует, что $v(z,c) \equiv g(z)$ и $r(z,c) \equiv g(z)$, поэтому уравнение (2.66) иметь решения не может, так что $\Delta_n(c) = \bar{\Delta}_n(c) = \emptyset$ для любого $n \geqslant k-1$, вследствие чего правило остановки ψ является усеченным ($P_{\theta_0}(\tau_\psi \leqslant k-1) = 1$), то есть $\psi \in \mathscr{F}$. Так что в конечно-нестационарном случае, при выполнении условий регулярности С1' – С2', любой критерий (ψ, ϕ) удовлетворяющий (2.62) и (2.58) является локально наиболее мощным в смысле теоремы 2.5.

Из сказанного выше понятно, что случай $k = 2$ представляет особый интерес, поскольку в этом случае границы области продолжения постоянны ($A_n(c) = A(c)$, $B_n(c) = B(c)$, $n = 1, 2, \dots$), поэтому оптимальный критерий имеет в точности ту же структуру, что и в случае н.о.р. наблюдений (см. [15]). Подобно [15], в этом случае можно показать (в предположении (2.67) и дополнительно предполагая конечность информации Фишера $E_{\theta_0}q_2^2$), что, при любых $A < B$, критерий (ψ, ϕ), у которого

$$I_{\{z_n \in (A,B)\}} \leqslant 1 - \psi_n \leqslant I_{\{z_n \in [A,B]\}},\ n = 1, 2, \dots, \tag{2.68}$$

обладает свойством локальной наибольшей мощности. А именно, можно показать, что существуют константы b, c, $A < b < B$, $c > 0$ такие, что (2.68) эквивалентно

$$I_{\{b - z_n \in (A(c),B(c))\}} \leqslant 1 - \psi_n \leqslant I_{\{b - z_n \in [A(c),B(c)]\}},\ n = 1, 2, \dots, \tag{2.69}$$

где $A(c)$, $B(c)$ - решения уравнения (2.66).

Если константа b, найденная таким образом, положительна, $b > 0$, то критерий (ψ, ϕ) с любым ϕ, удовлетворяющим (2.58), является локально наиболее мощным для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы

$H_1 : \theta > \theta_0$; если $b < 0$, то критерий (ψ, ϕ) с любым ϕ, удовлетворяющим

$$I_{\{z_n < b\}} \leqslant \phi_n \leqslant I_{\{z_n \leqslant b\}},\ n = 1, 2, \ldots,$$

является локально наиболее мощным для проверки H_0 против $H_1 : \theta < \theta_0$; наконец, если $b = 0$, то и тот и другой являются локально наиболее мощными, каждый для соответствующий альтернативы (см. замечание 2.4).

Наконец, отметим, что если распределение q_2 – симметрично, то $A(c) = -B(c)$ и поэтому в этом случае $b = (A + B)/2$.

Глава 3

Обобщение локально наиболее мощного критерия на случай многомерного параметра

В настоящей главе вводится понятие критерия, локально максиминного по направлениям, – обобщение понятия локально наиболее мощного критерия на случай многомерного параметра – и находится его вид. Также строится асимптотический критерий, локально максиминный по направлениям, и доказывается свойство асимптотической оптимальности такого критерия.

3.1 Постановка задачи

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка фиксированного объема n из распределения P_θ, зависящего от неизвестного параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta$, где Θ – открытое подмножество в R^N. Пусть U – ограниченное замкнутое подмножество единичной сферы. Пусть Θ_1 представляет собой конус

$$\Theta_1 = \{\theta_0 + tu, \,|\, u \in U,\, t > 0\}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим задачу проверки простой гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при сложной альтернативе $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\theta_0 \in \Theta$ – некоторое фиксированное значение параметра.

Предположим, что при P_θ для любого $\theta \in \Theta$ вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

имеет функцию «плотности»

$$f_\theta^n = f_\theta^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(производную Радона-Никодима его производной) по отношению к произведению мер

$$\mu^n \;=\; \underbrace{\mu \otimes \mu \otimes \cdots \otimes \mu}_{n \quad \text{раз}},$$

с некоторой сигма-конечной мерой μ на соответствующем пространстве.

Введем условия регулярности.

Условие C1". *Существует такая интегрируемая (относительно меры μ^n) функция $\dot f_{\theta_0}^n$, что*

$$\int \left| f_\theta^n - f_{\theta_0}^n - (\theta - \theta_0)' \dot f_{\theta_0}^n \right| d\mu^n = o(|\theta - \theta_0|)$$

при $\theta \to \theta_0$.

Условие регулярности C1" представляет собой по сути условие дифференцируемости совместной плотности в пространстве $L_1(\mu^n)$ интегрируемых относительно меры μ^n функций.

Здесь и далее в параграфе a' означает транспозицию вектора a.

Условие C2". *Существует такая функция $\Psi(x)$, что $\int |\Psi(x)|^2 d\mu(x) < \infty$ и*

$$\int \left(\sqrt{f_{\theta_0+u}(x)} - \sqrt{f_{\theta_0}(X)} - u'\Psi(x) \right)^2 d\mu(x) = o(|u|^2)$$

при $|u| \to 0$.

3.2 Критерий, локально наиболее мощный в направлении

Назовем критерием, локально наиболее мощным в направлении u, критерий, максимизирующий производную по направлению $u \in U$ функции мощности в $\theta = \theta_0$, $u'\dot\beta_{\theta_0}(\phi)$, в классе критериев уровня α

$$\alpha(\phi) \leqslant \alpha, \tag{3.2}$$

если такой критерий существует.

Рассуждения проходят полностью аналогично рассуждениям в параграфе 1.2 главы 1.

Для максимизации производной функции мощности в точке $\theta = \theta_0$, $u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi)$, по всем критериям, удовлетворяющим ограничению (3.2), запишем функцию Лагранжа:

$$L(\phi) = L(\phi; b) = b\alpha(\phi) - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi), \tag{3.3}$$

где $b \in \mathrm{R}$ – некоторый постоянный множитель.

Следующая теорема обосновывает правомерность применения метода множителей Лагранжа к сформулированной условной задаче.

Теорема 3.1 *Пусть Δ – некоторый класс критериев. Пусть существуют действительное число $b > 0$ и критерий $\phi \in \Delta$ с $L(\phi; b) > -\infty$, такие, что*

$$L(\phi; b) = \inf_{(\phi') \in \Delta} L(\phi'; b)$$

и такие, что

$$\alpha(\phi) = \alpha. \tag{3.4}$$

Тогда для любого критерия $\phi' \in \Delta$, удовлетворяющего

$$\alpha(\phi') \leqslant \alpha \tag{3.5}$$

выполняется

$$u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi) \geqslant u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi'). \tag{3.6}$$

Если неравенство (3.5) строгое, то неравенство (3.6) строгое.

Доказательство. Пусть $\phi' \in \Delta$ – любой критерий, удовлетворяющий (3.6). Вследствие (3.4) и определения $L(\phi; b)$

$$b\alpha - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi) = b\alpha(\phi) - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi)$$

$$\leqslant b\alpha(\phi') - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi') \leqslant b\alpha - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi').$$

Таким образом,

$$u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi) \geqslant u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi').$$

Чтобы получить последнее утверждение теоремы, заметим, что если

$$u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi) = u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi'),$$

то

$$b\alpha - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi) = b\alpha(\phi) - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi)$$
$$= b\alpha(\phi') - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi') = b\alpha - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi'),$$

что возможно лишь если $\mathscr{N}(\psi') = \mathscr{N}$ и $\alpha(\phi') = \alpha$. $\square$

Следующая теорема позволяет найти форму оптимального правила принятия решения ϕ .

Теорема 3.2 *Пусть выполняется условие регулярности C1". Тогда для любого $b > 0$ и для любого критерия ϕ справедливо неравенство*

$$b\alpha(\phi) - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi) \geqslant \int \min\{0, bf^n_{\theta_0} - u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}d\mu^n,$$

причем равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда

$$I_{\{bf^n_{\theta_0} < u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf^n_{\theta_0} \leqslant u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)}) \tag{3.7}$$

μ^n-почти наверное.

Доказательство. Представим два последних слагаемых рассматриваемой функции Лагранжа как

$$b\alpha(\phi) - u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi) = \int \phi_n(bf^n_{\theta_0} - u'\dot{f}^n_{\theta_0})d\mu^n. \tag{3.8}$$

Применяя лемму 1.1, взяв выражение

$$\phi_n(bf^n_{\theta_0} - u'\dot{f}^n_{\theta_0})$$

в качестве F_1, 0 в качестве F_2 и ϕ_n в качестве ϕ, получаем неравенство

$$\int \phi_n(bf^n_{\theta_0} - u'\dot{f}^n_{\theta_0})d\mu^n \geqslant \int \min\{0, bf^n_{\theta_0} - u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}d\mu^n, \tag{3.9}$$

равенство в котором достигается тогда и только тогда, когда

$$I_{\{bf^n_{\theta_0} < u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf^n_{\theta_0} \leqslant u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)})$$

μ^n-почти наверное.$\square$

Теорема 3.3 *Предположим, что выполнено условие регулярности C1". Пусть $b > 0$ – любое вещественное число и пусть критерий ϕ задается соотношением*

$$I_{\{bf^n_{\theta_0} < u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf^n_{\theta_0} \leqslant u'\dot{f}^n_{\theta_0}\}}(x^{(n)}) \tag{3.10}$$

μ^n-почти наверное.

Тогда критерий ϕ – локально наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где Θ_1 задается (3.1), в том смысле, что

$$u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant u'\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'), \tag{3.11}$$

если

$$\alpha(\phi') \leqslant \alpha(\phi). \tag{3.12}$$

Неравенство (3.11) является строгим, если строгим является неравенство (3.12).

Если в неравенствах (3.11) и (3.12) достигается равенство, то ϕ' удовлетворяет (3.10) μ^n-почти наверное.

3.3 Критерий, локально максиминный по направлениям

Рассмотрим производную функции мощности $v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u)$ критерия ϕ_u по произвольному направлению $v \in U$, предполагая, что ϕ_u имеет уровень α. Обозначим

$$\eta(u) = \inf_{v \in U} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u)$$

($\eta(u)$ представляет собой минимальную, по всем направлениям, производную по направлению от функции мощности критерия ϕ_u). Заметим, что точная нижняя грань достигается в некоторой точке $v = v^*(u)$, так как функция $v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u)$ непрерывна по v на компакте U.

Если существует такое направление $u_* \in U$, что

$$\eta(u^*) = \sup_{u \in U} \eta(u), \tag{3.13}$$

то назовем критерий ϕ_{u^*} *критерием, локально максиминным по направлениям* в классе критериев уровня α.

Если $\eta(u^*)$ в (3.13) меньше нуля, то для любого локально наиболее мощного по направлению критерия будут существовать направления, в которых производная функции мощности отрицательна, вследствие чего, в этом направлении, при альтернативе вероятность (правильно) отвергнуть нулевую гипотезу будет *даже меньше*, чем (ошибочно) отвергнуть ее при нулевой гипотезе (*локально смещенный критерий*). На практике избегают использования смещенных критериев, так что в подобном случае от применения нашего критерия следует воздерживаться. Таким образом, мы считаем, что класс задач, в которых применение критерия, локально максиминного по направлениям, обосновано, определяется условием

$$\sup_{u \in U} \eta(u) \geqslant 0. \tag{3.14}$$

3.4 Локально максиминный по направлениям критерий для нормального распределения

Пусть наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены по нормальному $\mathscr{N}(\theta, \Sigma)$ закону, где θ – неизвестный параметр, Σ – невырожденная известная матрица ковариаций. Построим локально максиминный по направлениям критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta = 0$ при альтернативе $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где Θ_1 задается (3.1),.

Вначале найдем форму критерия ϕ_u, локально наиболее мощного в направлении u. Совместная функция плотности N-мерного нормального распределения

$$f_\theta^n(x) = (2\pi)^{-nN/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp\left\{ -\sum_{j=1}^{n} (x_j - \theta)' \Sigma^{-1} (x_j - \theta)/2 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что градиент логарифма функции плотности равен

$$(\log f_\theta^n)'_\theta = \Sigma^{-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta),$$

следовательно,

$$\frac{\dot f^n_{\theta_0}}{f^n_{\theta_0}} = \Sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right),$$

и таким образом по теореме 3.3 критерий ϕ_u имеет форму

$$I_{\{u'\Sigma^{-1}(\sum_{k=1}^n x_k)>b\}} \leqslant \phi_u \leqslant I_{\{u'\Sigma^{-1}(\sum_{k=1}^n x_k)\geqslant b\}}.$$

Для нахождения константы b заметим, что из того, что

$$X_k \sim \mathscr{N}(\theta, \Sigma),$$

следует

$$u'\Sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \sim \mathscr{N}(u'\Sigma^{-1}\theta, nu'\Sigma u).$$

Таким образом, вероятность

$$P\left(u'\Sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) > b\right) = \Phi\left(\frac{u'\Sigma^{-1}\theta - b}{(nu'\Sigma^{-1}u)^{1/2}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона, и таким образом функция мощности критерия ϕ_u

$$\beta_\theta(\phi_u) = \Phi\left(\frac{u'\Sigma^{-1}\theta - b}{(nu'\Sigma^{-1}u)^{1/2}}\right).$$

Из того, что вероятность ошибки I рода

$$\beta_{\theta_0}(\phi_u) = \Phi\left(\frac{-b}{(nu'\Sigma^{-1}u)^{1/2}}\right) = \alpha,$$

следует выражение для b

$$b = z_\alpha (nu'\Sigma^{-1}u)^{1/2},$$

где $z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ – $(1-\alpha)$-квантиль стандартного нормального распределения. Таким образом, критическая область критерия, локально наиболее мощного в направлении u, имеет вид

$$u'\Sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) > z_\alpha (nu'\Sigma^{-1}u)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Итак, доказана

Теорема 3.4 *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из N-мерного нормального $\mathscr{N}(\theta, \Sigma)$ распределения с неизвестным вектором средних $\theta \in R^N$ и известной невырожденной матрицей ковариаций Σ. Тогда для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где Θ_1 задается (3.1), для любого единичного вектора $u \in U$ существует критерий, локально наиболее мощный в направлении u, уровня α с критической областью (3.15).*

Для нахождения формы критерия, локально максиминного по направлениям, осталось найти оптимальное направление u^*, то есть u, удовлетворяющее (3.13).

Теорема 3.5 *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из N-мерного нормального $\mathscr{N}(\theta, \Sigma)$ распределения с неизвестным вектором средних $\theta \in R^N$ и известной невырожденной матрицей ковариаций Σ. Тогда для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где Θ_1 задается (3.1), существует критерий, локально максиминный по направлениям, уровня α с критической областью*

$$u^{*\prime}\Sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) > z_\alpha (n u^{*\prime}\Sigma^{-1}u^*)^{1/2},$$

где u^* задается соотношением (3.13) с

$$\eta(u) = \inf_{v \in U} v'(u'\Sigma^{-1}u)^{-1/2}(\Sigma^{-1}u).$$

Доказательство. Функция мощности критерия, локально максиминного в направлениях, равна

$$\beta_\theta(\phi_u) = \Phi\left(\frac{u'\Sigma^{-1}\theta}{(nu'\Sigma^{-1}u)^{1/2}} - z_\alpha\right),$$

а градиент этой функции мощности равен

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u) = (2\pi)^{-1/2}\exp\{-z_\alpha^2/2\}(nu'\Sigma^{-1}u)^{-1/2}u'\Sigma^{-1}.$$

Далее утверждение теоремы следует из теоремы 3.4 и определения критерия, локально максиминного по направлениям.

Точная верхняя грань в (3.13) достигается, так как $\eta(u)$ непрерывана по u. $\square$

Замечание 3.1 *В соответствии с условием (3.14) класс задач, в котором применение критерия, локально максиминного по направлениям, обосновано, определяется условием (3.14), которое в данном случае эквивалентно условию*

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in U} v'(u'\Sigma^{-1}u)^{-1/2} u'\Sigma^{-1} \geqslant 0. \tag{3.16}$$

3.5 Асимптотический локально максиминный по направлениям критерий для ЛАН семейств

Пусть $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка фиксированного объема n из распределения с плотностью $f_\theta(x)$. Семейство распределений с плотностями $f_\theta(x)$ называется локально асимптотически нормальным (ЛАН) в точке $\theta = \theta_0$, если

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{f_{\theta_0 + h/\sqrt{n}}(X_k)}{f_{\theta_0}(X_k)} = \exp\left\{ h'\Delta_n(X^{(n)}) - \frac{1}{2} h' I(\theta_0) h + \xi_n \right\},$$

где $\Delta_n(X^{(n)}) \xrightarrow{d} \mathscr{N}(0, I(\theta_0))$, $\xi_n \xrightarrow{P_0} 0$ при $n \to \infty$, P_0 – распределение, соответствующее плотности $f_{\theta_0}(X)$ (см. [20]). Пусть семейство плотностей $f_\theta(x)$ удовлетворяет условию регулярности С2".

Заметим, что условие регулярности С2" влечет условие регулярности С1" для маргинальной плотности с

$$\dot{f}_{\theta_0}(x) = 2\Psi(x)\sqrt{f_{\theta_0}(X)}$$

(см. [24]). По теореме 7.2 [37] из С2" следует локальная асимптотическая нормальность рассматриваемого семейства распределений с вектором

$$\Delta_n(x^{(n)}) = 2n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} \Psi(x_k)(f_{\theta_0}(X_k))^{-1/2}$$

и информационной матрицей Фишера

$$I(\theta_0) = 4E_{\theta_0} \frac{\Psi(X)\Psi(X)'}{f_{\theta_0}(X)}.$$

Из следствия 7.2 главы 1 [8] нетрудно видеть, что из выполнения условия регулярности C2" для функции плотности $f_\theta^n(x^{(n)})$ следует его выполнение для совместной функции плотности $f_\theta(x^{(n)}) = \prod_{k=1}^n f_\theta(x_k)$, чего, в свою очередь, достаточно для выполнения условия регулярности C1" с

$$\dot{f}_{\theta_0}^n(x^{(n)}) = 2\Psi^n(x^{(n)})\sqrt{f_{\theta_0}(x^{(n)})},$$

где

$$\Psi^n(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^n \Psi(x_k)\prod_{j\neq k}\sqrt{f_{\theta_0}(X_k)}.$$

Таким образом, градиент функции мощности может быть представлен в виде

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi,\phi) = \int 2\Psi^n(x^{(n)})\sqrt{f(x^{(n)};\theta_0)}\phi(x^{(n)})\,d\mu(x^{(n)}),$$

или

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi,\phi) = \sqrt{n}\,E_{\theta_0}\Delta_n(X^{(n)})\,\phi(X^{(n)}) \tag{3.17}$$

для любого критерия (ψ,ϕ).

Теорема 3.6 *Пусть $X^{(n)} = (X_1,\ldots,X_n)$ – выборка из распределения с плотностью $f_\theta(x)$, удовлетворяющей C2", и пусть информационная матрица Фишера $I(\theta_0)$ невырожденная. Предположим, что выполнено условие (3.16) с $\Sigma = I(\theta_0)$. Тогда критерий $\phi_{\mathrm{A}}(X^{(n)})$ проверки гипотезы $H_0:\ \theta=\theta_0$ при альтернативе $H_1:\ \theta\in\Theta_1$, где Θ_1 задается (3.1), отвергающий H_0 при*

$$u'_{\mathrm{A}}I^{-1}(\theta_0)\Delta_n(X^{(n)}) > z_\alpha(u'_{\mathrm{A}}I^{-1}(\theta_0)u_{\mathrm{A}})^{1/2},$$

где u_{A} задается соотношением

$$\eta(u_{\mathrm{A}}) = \sup_{u\in U}\eta(u)$$

с

$$\eta(u) = \inf_{v\in U} v'(u'I(\theta_0)u)^{-1/2}(I(\theta_0)u),$$

обладает следующими свойствами:

$$\lim_{n\to\infty}\beta(\theta_0;\phi_A) = \alpha$$

и для любой последовательности ЛНМ в некотором направлении критериев $\phi_n(X^{(n)})$ таких, что

$$\limsup_{n\to\infty} E_{\theta_0}\phi_n(X^{(n)}) \leqslant \alpha,$$

выполняется следующее неравенство:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\inf_{v\in U} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_n)}{\inf_{v\in U} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_{\mathrm{A}})} \leqslant 1. \tag{3.18}$$

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 3.1 *Пусть $g : \mathrm{R}^k \to \mathrm{R}^N$ непрерывна в любой точке такого множества C, что $P(X \in C) = 1$. Если $X_n \xrightarrow{d} X$, то $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.*

Лемма 3.2 *Пусть X_n равномерно интегрируема, то есть*

$$\sup_n E|X_n|I_{\{|X_n|>c\}} \to 0$$

при $c \to \infty$. Если $X_n \xrightarrow{d} X$, то $EX_n \to EX$.

Доказательства лемм см. в главе 2 §1 [37] и главе 1 §5 [1].

Доказательство. Пусть

$$\alpha_n = E_{\theta_0}\phi_n(X^{(n)}),$$

$$\chi(x) = I_{\{x:\ x>1\}}(x),$$

$$r_n = \frac{\inf_{v\in U} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_{\mathrm{A}})}{\inf_{v\in U} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_n)}.$$

Тогда по условию теоремы

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha' \leqslant \alpha,$$

и

$$\phi_{\mathrm{A}}(x^{(n)}) = \chi\left(\frac{u'_{\mathrm{A}} I^{-1}(\theta_0)\Delta_n(x^{(n)})}{z_\alpha (u'_{\mathrm{A}} I^{-1}(\theta_0) u_{\mathrm{A}})^{1/2}}\right).$$

Рассмотрим ЛНМ в направлении u_n *нерандомизированный* критерий

$$\phi_n(x^{(n)}) = \chi\left(\frac{u'_n\Delta_n(x^{(n)})}{c_n}\right)$$

(см. теорему 1) – рандомизированные критерии рассматриваются вполне аналогично. Из (3.17) следует, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_n) = \sqrt{n} E_{\theta_0} \Delta_n(X^{(n)}) \, \chi\left(\frac{u_n' \Delta_n(X^{(n)})}{c_n}\right).$$

Таким образом, производная по направлению v функции мощности критерия ϕ_n равна

$$v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_n) = \sqrt{n} v' E_{\theta_0} \Delta_n(X^{(n)}) \, \chi\left(\frac{u_n' \Delta_n(X^{(n)})}{c_n}\right).$$

Кроме того, по условию

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(\theta_0; \phi_n) = \alpha.$$

Очевидно,

$$\inf_{v \geqslant 0} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_n) \leqslant \sqrt{n} \min_k \{E_{\theta_0} [\Delta_n(X^{(n)})]_k\} \, \chi\left(\frac{u_n' \Delta_n(X^{(n)})}{c_n}\right).$$

Ниже мы покажем, что при достаточно больших n все компоненты

$$E_{\theta_0} \Delta_n(X^{(n)}) \chi\left(\frac{u_{\mathrm{A}}' I^{-1}(\theta_0) \Delta_n(X^{(n)})}{z_\alpha (u_{\mathrm{A}}' I^{-1}(\theta_0) u_{\mathrm{A}})^{1/2}}\right)$$

положительны, поэтому при достаточно больших n

$$\inf_{v \geqslant 0} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_{\mathrm{A}}) = \sqrt{n} \min_k \left\{ E_{\theta_0} [\Delta_n(X^{(n)})]_k \, \chi\left(\frac{u_{\mathrm{A}}' I^{-1}(\theta_0) \Delta_n(X^{(n)})}{z_\alpha (u_{\mathrm{A}}' I^{-1}(\theta_0) u_{\mathrm{A}})^{1/2}}\right)\right\}.$$

Таким образом, (3.18) будет доказано, если мы покажем, что для

$$r_n = \frac{\min_k \{E_{\theta_0} [\Delta_n(X^{(n)})]_k \, \chi(u_n' \Delta_n(X^{(n)})/c_n)\}}{\min_k \{E_{\theta_0} [\Delta_n(X^{(n)})]_k \, \chi(u_{\mathrm{A}}' I^{-1}(\theta_0) \Delta_n(X^{(n)})/(z_\alpha (u_{\mathrm{A}}' I^{-1}(\theta_0) u_{\mathrm{A}})^{1/2}))\}}$$

имеет место неравенство

$$r = \limsup_{n\to\infty} r_n \leqslant 1. \tag{3.19}$$

Предположим противное, т. е. что $r > 1$. Из последовательности индексов $\{n\}$ выберем такую подпоследовательность $\{n_1\} \subset \{n\}$, чтобы подпоследовательность $\{r_{n_1}\}$ сходилась к r. Из полученной подпоследовательности индексов $\{n_1\}$ выберем такую подпоследовательность $\{n_2\} \subset \{n_1\}$, чтобы подпоследовательность $\{\alpha_{n_2}\}$ сходилась к α. Продолжая процедуру выбора подпоследовательностей индексов, получим подпоследовательность $\{u_{n_3}\}$, сходящуюся к некоторому u, и $\{c_{n_4}\}$, сходящуюся к некоторому c. Вместо индекса n_4 вновь будем писать n. Получаем, что последовательность случайных векторов

$$\left(\Delta_n(X^{(n)}), \frac{u_n'\Delta_n(X^{(n)})}{c_n}\right)$$

сходится по распределению к случайному вектору

$$\left(\Delta, \frac{u'\Delta}{c}\right),$$

где

$$\Delta \sim \mathscr{N}(0, I(\theta_0)).$$

С помощью леммы 3.2 докажем, что

$$E_{\theta_0}\Delta_n(X^{(n)})\,\chi\left(\frac{u_n'\Delta_n}{c_n}\right) \to E\Delta\,\chi\left(\frac{u'\Delta}{c}\right).$$

При этом сходимость подынтегрального выражения по распределению следует из Леммы 1, а равномерная интегрируемость получается из следующих рассуждений.

Как следует из определений Δ_n и Δ,

$$E_{\theta_0}\Delta_n = 0,$$

$$E\Delta = 0$$

и

$$E_{\theta_0}\Delta_n\Delta_n' = I^{-1}(\theta_0) = E\Delta\Delta',$$

поэтому тривиальным образом получаем, что первые и вторые моменты Δ_n сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим моментам Δ. Отсюда следует равномерная интегрируемость последовательности Δ_n, а следовательно, и

$$\Delta_n\,\chi\left(\frac{u_n'\Delta_n}{c_n}\right).$$

Вполне аналогично получаем:

$$E_{\theta_0}\Delta_n(X^{(n)})\,\chi\left(\frac{u_{\mathrm{A}}'I^{-1}(\theta_0)\Delta_n(X^{(n)})}{z_\alpha(u_{\mathrm{A}}'I^{-1}(\theta_0)u_{\mathrm{A}})^{1/2}}\right) \to E\Delta\,\chi\left(\frac{u_{\mathrm{A}}'I^{-1}(\theta_0)\Delta}{z_\alpha(u_{\mathrm{A}}'I^{-1}(\theta_0)u_{\mathrm{A}})^{1/2}}\right)$$

при $n \to \infty$.

Таким образом,

$$r = \frac{\min_k \{E[\Delta]_k \chi(u'\Delta/c)\}}{\min_k \{E[\Delta]_k \chi(u'_{\mathrm{A}} I^{-1}(\theta_0)\Delta/(z_\alpha (u'_{\mathrm{A}} I^{-1}(\theta_0) u_{\mathrm{A}})^{1/2}))\}}, \tag{3.20}$$

и больше единицы по предположению. В частности, отсюда следует, что числитель в правой части (3.20) положителен. Используя этот факт, легко видеть, что правая часть (3.20) совпадает с

$$\frac{\inf_v v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi')}{\inf_v v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi'_{\mathrm{A}})}, \tag{3.21}$$

где

$$\phi'_{\mathrm{A}}(\Delta) = \chi\left(\frac{u'_{\mathrm{A}} I^{-1}(\theta_0)\Delta}{z_\alpha (u'_{\mathrm{A}} I^{-1}(\theta_0) u_{\mathrm{A}})^{1/2}}\right),$$

$$\phi'(\Delta) = \chi\left(\frac{u'\Delta}{c}\right).$$

Поскольку в знаменателе (3.21) стоит производная по направлению локально максиминного (для многомерного нормального распределения) по направлениям критерия уровня α, а в числителе – производная по направлению функции мощности некоторого критерия уровня $\alpha' \leqslant \alpha$, то, по теореме 3.5, числитель не превосходит знаменателя, что противоречит предположению $r > 1$.

Неравенство (3.19) доказано, а с ним и (3.18). □

Литература

[1] Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер.* – М.: Наука. – 1977. – 352 с.

[2] Боровков А. А. *Математическая статистика.* – Новосибирск: Наука, издательство института математики. – 1997. – 772 с.

[3] Володин И. Н. Гарантийные процедуры статистического вывода (определение объема выборки). *В сб.: Исследования по прикладной математике.* – 10. – 1984. – с. 13–53.

[4] Володин И. Н. Нижние границы для среднего объема выборки в критериях инвариантности. *Теория вероятностей и ее применения.* – 25(2). – 1980. – с. 359–364.

[5] Володин И. Н. Нижние границы для среднего объема выборки и эффективность процедур статистического вывода. *Теория вероятностей и ее применения.* – 24(1). – 1979. – с. 119–129.

[6] Володин И. Н. Нижние границы для среднего объема выборки в критериях согласия и однородности. *Теория вероятностей и ее применения.* – 24(3). – 1979. – с. 637–645.

[7] Де-Гроот М. *Оптимальные статистические решения.* – М.: Мир. – 1974.

[8] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. *Асимптотическая теория оценивания.* – М.: Наука. – 1979. – 528 с.

[9] Леман Э. *Проверка статистических гипотез.* – М.: Наука. – 1979. – 408 с.

[10] Новиков П. А. Локально наиболее мощные последовательные критерии для марковских процессов с дискретным временем. *Теория вероятностей и ее применения.* – 2010. – 55(2). – с. 369–372.

[11] Рокафеллер Р. *Выпуклый анализ.* – М.: Мир. – 1973. – 470 с.

[12] Русас Дж. *Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике.* – М.: Мир. – 1975. – 254 с.

[13] Abraham J. K. *The local power of sequential tests subject to an expected sample size restriction.* – Unpublished Stanford technical report. – 1969.

[14] Bahadur R. R. An optimal property of the likelihood ratio statistic. *Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability (1965/66) I - University of California Press, Berkeley.* – 1967. – P. 13–26.

[15] Berk R. H. Locally most powerful sequential tests. *Annals of Statistics.* – 3. – 1975. – P. 373–381.

[16] Ghosh M., Mukhopadhyay N., Sen P. K. *Sequential Estimation.* – New York: Wiley. – 1997.

[17] Ferguson T. S. *Mathematical Statistics: a Decision Theoretic Approach.* – New York: Academic Press. – 1967.

[18] Irle A. *Sequentialanalyse. Optimale sequentielle Tests.* – Stuttgart: Teubner. – 1990.

[19] Liu Y., Blostein D. Optimality of the sequential probability ratio tests for nonstationary observations. *IEEE transactions on information theory.* – 28. – 1992. – P. 177–182.

[20] Le Cam L. Locally asymptotically normal families of distributions. *University of California publications in statistics.* – 3. – 1960. – P. 37–98.

[21] Müller-Funk U. *Mathematical Programming and Optimal Stopping in Sequential Testing Theory.* – Habilitatonsschrift. – Universitat Freiburg. – 1986.

[22] Müller-Funk U., Pukelsheim F., Witting H. *Locally most powerful tests for two-sided hypotheses.* In: Probability and statisitcal decision theory. – Vol. A (Bad Tatzmannsdorg, 1983). – P. 31–56. – Dordrecht: Reidel. – 1985.

[23] Novikov A. Asymptotic optimality of two-stage hypotheses tests. *Aportaciones Matematicas, Serie Comunicaciones.* – 35. – 2005. – P. 37–43.

[24] Novikov A. Locally most powerful two-stage tests. *In: PRAGUE STOCHASTICS 2006. Proceedings of the joint session of 7th Prague Symposium on Asymptotic Statistics and 15th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, held in Prague from August 21 to 25, 2006.* – 2006. – P. 554–567.

[25] Novikov A. Optimal sequential tests for two simple hypotheses based on independent observations. *International journal of pure and applied mathematics.* – 2008. – 45(2). – P. 291–314.

[26] Novikov A. Optimal sequential tests for two simple hypotheses. *Sequential analysis.* – 2009. – 28(2). – P. 188–217.

[27] Novikov A., Novikov P. Locally most powerful sequential tests of a simple hypothesis vs. one-sided alternatives. *Journal of Statistical Planning and Inference.* – 2010. – 140(3). – P. 750–765.

[28] Novikov P. Locally optimal tests for multivariate parameter with order-restricted alternatives. *In: PRAGUE STOCHASTICS 2006. Book of Abstracts of the joint session of 7th Prague Symposium on Asymptotic Statistics and 15th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, held in Prague from August 21 to 25, 2006.* – 2006. – P. 68.

[29] Roters M. Locally most powerful sequential tests for processes of the exponential class with stationary and independent increments. *Metrika.* – 39. – 1992. – P. 177–183.

[30] Roters M. Locally Most Powerful Sequentially Planned Tests in Continuous Time. *Sequential Analysis.* – 25(4). – 2006. – P. 365–378.

[31] Tsai M.-T. M., Sen P. K. On the local optimality of optimal linear tests for restricted alternatives. *Statistica Sinica.* – 3. – 1993. – P. 103–115.

[32] Schaafsma W., Smid L. J. Most stringent somewhere most powerful tests against alternatives restricted by a number of linear inequalities. *Annals of Mathematical Statistics.* – 37(5). – 1966. – P. 1161–1172.

[33] Schmitz N. *Optimal sequentially planned decision procedures. Lecture notes in statistics 79.* – New York: Springer-Verlag. – 1993.

[34] Shi N. Z. Testing a normal mean vector against the alternative determined by a convex cone. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* – 41. – 1987. – P. 133–145.

[35] Shi N. Z., Kudô A. The most stringent somewhere most powerful one-sided test of the multivariate normal mean. *Math. Centre Tracts.* – 29. – 1987. – P. 303–328.

[36] Stein C. A note on cumulative sums. *Annals of Mathematical Statistics.* – 17. – 1946. – P. 498–499.

[37] van der Vaart A. W. *Asymptotic Statisitcs.* – Cambridge University Press. – 1998.

[38] Wald A., Wolfowitz J. Optimum character of the sequential probability ration test. *Annals of Mathematical Statistics.* – 19. – 1948. – P. 326–339.

[39] Wald A. *Statistical Decision Functions.* – New York: Wiley. – 1950.